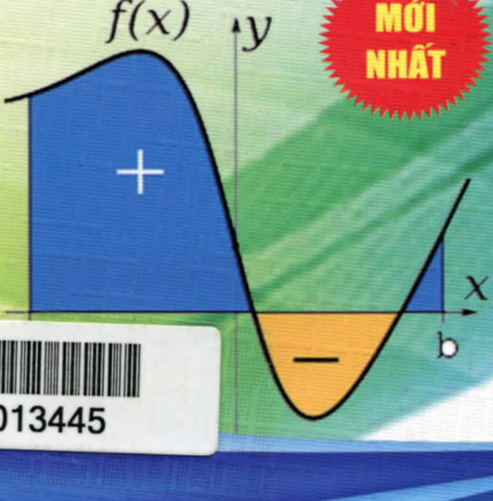
515.076
GI-103N

TRẦN TUẤN ANH

GIẢI NHANH BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM & TÍCH PHÂN

DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 11-12

MỚI NHẤT



DVL.013445

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

GTi 103N

TRẦN TUẤN ANH

Giải nhanh bài toán
NGUYÊN HÀM
Và TÍCH PHÂN

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL 13445 14

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

GIẢI NHANH BÀI TOÁN

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Nhà xuất bản ĐHQG-HCM và tác giả/đối tác liên kết giữ bản quyền©
Copyright © by VNU-HCM Publishing House and author/co-partnership
All rights reserved

SÁCHVIỆT
ĐIỂM TỰA TRI THỨC
CÔNG TY TNHH MỘT THÀNH VIÊN SÁCH VIỆT
391/15A Huỳnh Tấn Phát, P.Tân Thuận Đông, Quận 7, TP.HCM
ĐT: (08) 38.720.697 - Fax: (08) 38.726.052 - MST: 0304907135
Email: info@sachvietco.com - Website: www.sachvietco.com

Xuất bản năm 2013

Lời nói đầu

Việc giải một bài toán nói chung là một quá trình tư duy cao độ, dựa trên hiểu biết của người giải toán. Việc tính một bài toán nguyên hàm hay một bài toán tích phân cũng vậy. Có người thậm chí không giải được, có người giải được nhưng cần quá trình mày mò rất lâu, thử hết cách này đến cách khác mới giải xong, trong khi có người lại tìm được cách giải rất nhanh. Vậy đâu là bí quyết để giải nhanh được một bài toán nguyên hàm, một bài toán tích phân nói riêng? Cách rèn luyện để có cách giải nhanh?

Cuốn sách này viết ra nhằm đem lại cho bạn đọc những cách hiểu, những hướng đi, thủ thuật để tiếp cận nhanh tới lời giải thỏa đáng cho một bài toán nguyên hàm, một bài toán tích phân. Các công thức đưa tới người đọc không mang tính áp đặt mà theo hướng dễ hiểu, dễ nhớ để người đọc có thiện cảm hơn về các công thức đó, phục vụ cho việc vận dụng tính toán sau này.

Cuốn sách viết theo lối diễn giảng nên khó tránh khỏi khiếm khuyết, rất mong nhận được những góp ý thiết thực của bạn đọc gần xa.

Xin chân thành cảm ơn những góp ý, chỉ dẫn của quý thầy:

- TS. **Nguyễn Viết Đông**, Trưởng Bộ môn Giáo dục Toán học, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.
- Thầy **Nguyễn Đình Độ**, Phó Hiệu trưởng Trường THPT Thành Nhân – TP. Hồ Chí Minh.
- Thầy **Lê Hoành Sử**, Giảng viên ĐHQG TP. HCM – Trường ĐH Kinh Tế Luật.
- Thầy **Nguyễn Tất Thu**, Giáo viên Trường chuyên Lương Thế Vinh – Biên Hòa – Đồng Nai.

Trần Tuấn Anh

GIẢI NHANH BÀI TOÁN TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013

Câu 1: Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x dx$. (ĐH khối A, A_1 – 2013)

Cách giải thông thường

Cách 1: $I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}.\ln x dx=\int_1^2 \ln x dx+\int_1^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\ln x dx$. Ta xét :

+ $I_1=\int_1^2 \ln x dx$.

Đặt $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$; $dv=dx\Rightarrow v=x$.

$$I_1=\int_1^2 \ln x dx=x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x}{x}dx=2\ln 2-1.$$

+ $I_2=\int_1^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\ln x dx$

Đặt $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$; $dv=\left(\frac{-1}{x^2}\right)dx\Rightarrow v=\frac{1}{x}$.

$$I_2=\int_1^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\ln x dx=\int_1^2 \ln x d\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\frac{1}{x}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}.$$

Vậy $I=I_1+I_2=2\ln 2-1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(5\ln 2-3)$.

Cách 2: $I=\int_1^2\frac{x^2-1}{x^2}.\ln x dx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x dx$

Đặt $t=\ln x\Rightarrow x=e^t$ và $dx=e^t dt$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0$; $x=2\Rightarrow t=\ln 2$.

$$I=\int_0^{\ln 2}\left(1-\frac{1}{e^{2t}}\right)te^t\,dt=\int_0^{\ln 2}\left(e^t-e^{-t}\right)tdt=\int_0^{\ln 2}td\left(e^t+e^{-t}\right)$$

$$=t\left(e^t+e^{-t}\right)\Big|_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}\left(e^t+e^{-t}\right)dt$$

$$=t\left(e^t+e^{-t}\right)\Big|_0^{\ln 2}-\left(e^t-e^{-t}\right)\Big|_0^{\ln 2}=\ln 2.\left(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}\right)-\left(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right)$$

$$=\ln 2.\left(2+\frac{1}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(5\ln 2-3).$$

Vậy $I=\frac{1}{2}(5\ln 2-3)$.

Cách giải nhanh

Cách 3: *các bạn để ý quan hệ giữa* $\frac{1}{x}$ *và* $\frac{1}{x^2}$ *là :* $\frac{-1}{x^2}dx=d\left(\frac{1}{x}\right)$*; quan hệ giữa x và 1 là :* $1dx=dx$.

Do đó, ta có : $\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)dx=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=d\left(x+\frac{1}{x}\right)$. *Vậy ta có thể giải nhanh bài toán trên như sau :*

$$I=\int_1^2\frac{x^2-1}{x^2}.\ln x\,dx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x\,dx=\int_1^2\ln x\,d\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\ln x.\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2-\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\ln x.\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2-\int_1^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\ln x.\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}(5\ln 2-3).$$

Lời giải thật nhanh gọn so với hai cách trên !

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx$ (ĐH khối B – 2013

Cách giải thông thường

Cách 1: Do dấu hiệu "$\sqrt{2-x^2}$" nên ta chọn ẩn phụ $x=\sqrt{2}\sin t$.

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\Rightarrow dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\sin t\sqrt{2-2\sin^2 t}.\sqrt{2}\cos t\,dt=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t.\cos t.\sqrt{1-\sin^2 t}\,dt$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t.\cos t.|\cos t|dt=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cos^2 t\,dt.$$

Xét tích phân $J=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cos^2 t\,dt$.

Đặt $u=\cos t\Rightarrow du=-\sin t\,dt$.

Đổi cận : $t=0\Rightarrow u=1; t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có : $J=-2\sqrt{2}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}u^2du=2\sqrt{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1u^2du=2\sqrt{2}.\frac{u^3}{3}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Vậy $I=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Cách 2: Theo kinh nghiệm thì thấy căn thức ta đặt căn thức là ẩn phụ !

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow t^2=2-x^2\Rightarrow tdt=-xdx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}; x=1\Rightarrow t=1$.

Ta có: $I = -\int_{\sqrt{2}}^{1} t^2 dt = \int_{1}^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Cách giải nhanh

Cách 3: *Các bạn để ý quan hệ giữa x và x^2 là:*

$xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}d\left(2-x^2\right)$. *Nên việc ta chọn ẩn phụ $t=\sqrt{2-x^2}$ (ở cách 2) là hoàn toàn tự nhiên ! không mang tính áp đặt của kinh nghiệm trong suy nghĩ là : **"thấy có căn thức thì đặt căn thức là ẩn phụ".** Chúng ta có thể giải nhanh như sau:*

$$I = \int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 \left(2-x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(2-x^2\right) = \frac{-1}{2}\cdot\frac{\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

Lời giải thật nhanh gọn !

Câu 3: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$ (ĐH khối D – 2013)

Cách giải thông thường

Cách 1: Ta có :

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = 1 + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$$

Xét tích phân $J = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$.

Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx$.

Đổi cận : $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$.

Ta được $J = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^2 = \ln 2$.

Vậy $I = 1+\ln 2$.

Cách 2: Ta có :

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = 1 + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$$

Xét tích phân $J = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$.

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt = \left(1+\tan^2 t\right)dt$, $t \in \left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Đổi cận : $x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Ta được $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan t}{\tan^2 t+1}\left(1+\tan^2 t\right)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t}dt$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}d(\cos t) = -2\ln|\cos t|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -2\ln\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $I = 1 - 2\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = 1+\ln 2$.

Cách giải nhanh

Cách 3: *Các bạn để ý quan hệ giữa x và x^2 là:* $2xdx = d\left(x^2\right) = d\left(x^2+1\right)$.

Nên việc ta chọn ẩn phụ $t = x^2+1$ (ở cách 1) là hoàn toàn tự nhiên ! Chúng ta có thể giải nhanh như sau :

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}d\left(x^2+1\right) = x\Big|_0^1 + \ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1 = 1+\ln 2.$$

Lời giải thật nhanh gọn !

Để có cách nhìn "***tường minh***" về cách giải nhanh Nguyên hàm và Tích phân, mời bạn đọc tìm hiểu những kiến giải trong cuốn sách này !

Chương 1. NGUYÊN HÀM

Bài 1. NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trên K (K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$). Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên K nếu F'(x) = f(x) với mọi x thuộc K.

Mọi hàm số f(x) liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Sau này, yêu cầu tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của nó.

F(x) là một nguyên hàm của hàm f(x) thì F(x) + C (C là hằng số) là họ nguyên hàm của hàm số f(x) hay tích phân bất định của hàm f(x).

Kí hiệu : $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$.

Ví dụ 1

a) $\int 2xdx = x^2 + C$ vì $(x^2 + C)' = 2x$.

b) $\int \cos xdx = \sin x + C$ vì $(\sin x + C)' = \cos x$.

* *Lưu ý: để hiểu nhanh những nội dung kiến thức trong cuốn sách này, bạn đọc nên rèn luyện thành thạo việc tính đạo hàm !*

2. Tính chất thứ nhất

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + C}$$

Tính chất thứ nhất được suy trực tiếp từ định nghĩa nguyên hàm. Trong thực hành, tính chất này giúp ta tìm ra nguyên hàm của một hàm số đơn giản, cũng như việc xác định lại nguyên hàm tìm ra có đúng không theo cách nghĩ: "*muốn tìm nguyên hàm của hàm số f(x), chúng ta tìm hàm số mà đạo hàm bậc nhất của nó phải chính là f(x)*". Với cách hiểu đó, chúng ta có thể thành lập Bảng công thức nguyên hàm cơ bản như sau :

(1) **Công thức 1 :** $\int 0dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng 0? Hiển nhiên đó là hằng số ! Vậy ta có công thức thứ nhất: $\boxed{\int 0dx = C}$.

(2) **Công thức 2 :** $\int dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng 1? Dễ dàng nhận thấy đó là x vì x' = 1. Vậy ta có công thức thứ hai: $\boxed{\int dx = x + C}$.

(3) **Công thức 3 :** $\int x^{\alpha}dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng x^{α}? Chúng ta liên tưởng ngay tới công thức đạo hàm $(x^n)' = nx^{n-1}$ hay $\frac{(x^n)'}{n} = x^{n-1}$. Ta thay $n - 1 = \alpha$ hay $n = \alpha + 1$, thu được công thức $\frac{(x^{\alpha+1})'}{\alpha+1} = x^{\alpha}$ hay $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$. Vậy là hàm số $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ có đạo hàm bậc nhất bằng x^{α}. Suy ra công thức thứ ba : $\boxed{\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$ $(\alpha \neq -1)$.

(4) **Công thức 4 :** $\int \frac{1}{x}dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng $\frac{1}{x}$? Ta liên tưởng tới công thức $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ thì thu được công thức $\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C}$. Chúng ta lấy dấu giá trị tuyệt đối vì điều kiện của hàm Lôgarit !

(5) **Công thức 5 :** $\int a^x dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng a^x? Từ công thức tính đạo hàm quen thuộc $(a^x)' = a^x \ln a$ hay $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$, tức là hàm số $\frac{a^x}{\ln a}$ có đạo hàm bậc nhất bằng a^x. Vậy ta dễ dàng thu được công thức $\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$ $(a > 0, a \neq 1)$.

(6) **Công thức 6 :** $\int e^x dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng e^x? Dễ dàng ta nhận thấy đó là hàm e^x vì $(e^x)' = e^x$, suy ra công thức thứ sáu : $\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$. Công thức thứ sáu là trường hợp riêng của công thức thứ năm khi thay "a" bằng "e" !

(7) **Công thức 7 :** $\int \cos x dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng $\cos x$? Từ công thức quen thuộc $(\sin x)' = \cos x$, ta có ngay công thức thứ bảy là : $\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C}$.

(8) **Công thức 8 :** $\int \sin x dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng $\sin x$? Từ công thức quen thuộc $(\cos x)' = -\sin x$ hay $(-\cos x)' = \sin x$, ta có hàm số mà đạo hàm bậc nhất của nó bằng "sinx" là "– cosx", suy ra công thức thứ tám là : $\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + C}$.

(9) **Công thức 9 :** $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng $\frac{1}{\cos^2 x}$? Trường hợp này không dễ tìm nguyên hàm hơn các trường hợp trên ! chúng ta dự đoán hàm số cần tìm có dạng $\frac{A}{\cos x}$ (chú ý do mẫu thức "$\cos^2 x$"). Ta có: $\left(\frac{A}{\cos x}\right)' = \frac{A'.\cos x + \sin x.A}{\cos^2 x}$, rõ ràng nếu chọn A = sinx thì $\frac{A'.\cos x + \sin x.A}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Vậy hàm số có đạo hàm bậc nhất bằng $\frac{1}{\cos^2 x}$ là hàm số $\frac{\sin x}{\cos x}$ hay $\tan x$. Suy ra công thức thứ chín :

$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C}$.

(10) **Công thức 10 :** $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = ?$ Ta suy nghĩ : hàm số nào có đạo hàm bậc nhất bằng $\frac{1}{\sin^2 x}$? Tương tự công thức 9 ! Mình dự đoán hàm số cần tìm có dạng $\frac{A}{\sin x}$ (chú ý do mẫu thức "$\sin^2 x$"). Ta có: $\left(\frac{A}{\sin x}\right)' = \frac{A'.\sin x - \cos x.A}{\sin^2 x}$, rõ ràng nếu chọn A = cosx thì $\frac{A'.\sin x - \cos x.A}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$. Vậy hàm số có đạo hàm bậc nhất bằng $\frac{1}{\sin^2 x}$ là hàm số $\frac{-\cos x}{\sin x}$ hay (– cotx). Suy ra công thức thứ mười :

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C}.$$

Vậy ta có Bảng nguyên hàm cơ bản sau :

$\int 0 dx = C$	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C (\alpha > 0; \alpha \neq 1)$
$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

Hiểu và thuộc bảng nguyên hàm cơ bản là điều kiện thiết yếu để chúng ta tính được nguyên hàm cũng như tích phân sau này. Chính vì vậy, chúng ta cần sử dụng thành thạo các công thức trong bảng nguyên hàm cơ bản.

3. Tính chất thứ hai

$$\boxed{\int k f(x) dx = k \int f(x) dx}$$

Trong công thức này, điều mà chúng ta cần chú ý là hệ số "k" (hệ số k có thể "ra", "vào" qua dấu nguyên hàm!), tất nhiên k phải là hằng số, còn biến số không đưa ra ngoài dấu nguyên hàm được.

Ví dụ 2. Áp dụng tính chất thứ hai và Bảng nguyên hàm cơ bản, ta có :

a) $\int 6x dx = 6\int x dx$ *(áp dụng tính chất thứ hai)*

$= 6.\dfrac{x^2}{2} + C$ *(áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản)*

$= 3x^2 + C$.

b) $\int \dfrac{\cos x}{3} dx = \dfrac{1}{3}\int \cos x dx = \dfrac{1}{3}\sin x + C$.

c) $\int e^{x+1} dx = \int e.e^x dx = e\int e^x dx = e.e^x + C$.

d) $\int 10\sqrt[3]{x^2} dx = 10\int x^{\frac{2}{3}} dx = 10.\dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = 6x^{\frac{5}{3}} + C.$

Nói chung, khi tính nguyên hàm cũng như tích phân sau này, chúng ta cố gắng biến đổi hàm số dưới dấu nguyên hàm hay dưới dấu tích phân xuất hiện những hàm số có trong bảng nguyên hàm cơ bản. Do vậy, việc nắm được Bảng nguyên hàm cơ bản là điều kiện rất quan trong để chúng ta tính được nguyên hàm, tích phân.

4. Tính chất thứ ba

$$\boxed{\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

Chúng ta có thể hiểu một cách đơn giản công thức trên như sau: nguyên hàm của tổng (hiệu) của hai hàm số, bằng tổng (hiệu) các nguyên hàm của hai hàm số đó.

Công thức có thể mở rộng như sau :

$$\boxed{\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx}$$

Bây giờ chúng ta đi xét các ví dụ minh họa :

Ví dụ 3. Áp dụng các tính chất và Bảng nguyên hàm cơ bản, ta có :

a) $I_1 = \int (4x + 3\cos x)dx = \int 4x dx + \int 3\cos x dx$ *(áp dụng tính chất thứ ba)*

$= 4\int x dx + 3\int \cos x dx$ *(áp dụng tính chất thứ hai)*

$= 4.\dfrac{x^2}{2} + 3\sin x + C$ *(áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản)*

$= 2x^2 + 3\sin x + C$.

b) $I_2 = \int (5e^x - \dfrac{7}{\cos^2 x})dx = \int 5e^x dx - \int \dfrac{7}{\cos^2 x} dx$ *(áp dụng tính chất thứ ba)*

$= 5\int e^x dx - 7\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$ *(áp dụng tính chất thứ hai)*

$= 5e^x - 7\tan x + C$. *(áp dụng bảng nguyên hàm cơ bản)*

c) $I_3 = \int\left(3^{x+2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int 3^{x+2} dx + \int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int 3^2.3^x dx + \int x^{\frac{-2}{3}} dx$

$= 9\int 3^x dx + \int x^{\frac{-2}{3}} dx = \dfrac{9.3^x}{\ln 3} + \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \dfrac{9.3^x}{\ln 3} + 3x^{\frac{1}{3}} + C$.

d) $I_4 = \int \dfrac{3x^2 - 2x + 4}{x} dx = \int \left(\dfrac{3x^2}{x} - \dfrac{2x}{x} + \dfrac{4}{x}\right) dx$

$= \int 3x dx - \int 2 dx + \int \dfrac{4}{x} dx$

$= 3\int x dx - 2\int dx + 4\int \dfrac{1}{x} dx = \dfrac{3x^2}{2} - 2x + 4\ln x + C$.

Trong thực hành, ta trình bày nhanh như sau :

a) $I_1 = \int (4x + 3\cos x)dx = 2x^2 + 3\sin x + C$.

b) $I_2 = \int (5e^x - \dfrac{7}{\cos^2 x})dx = 5e^x - 7\tan x + C$.

c) $I_3 = \int\left(3^{x+2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int\left(3^2.3^x + x^{\frac{-2}{3}}\right)dx = \dfrac{9.3^x}{\ln 3} + 3x^{\frac{1}{3}} + C$.

d) $I_4 = \int \dfrac{3x^2 - 2x + 4}{x} dx = \int \left(3x - 2 + \dfrac{4}{x}\right) dx$

$= \dfrac{3x^2}{2} - 2x + 4\ln x + C$.

Tùy theo khả năng của người làm toán mà ta có thể lược bỏ đi những bước giải không cần thiết.

Ví dụ 4. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx$; b) $I_2 = \int \frac{x+x^2-e^x x^3}{x^3}dx$

c) $I_3 = \int 2^x.3^x dx$; d) $I_4 = \int \frac{e^x}{4^{\frac{x}{2}}}dx$.

Giải

Ta biến đổi hàm số dưới dấu nguyên hàm về dạng hàm có chứa các hàm trong bảng nguyên hàm cơ bản để tính.

a) Ta có :

$$I_1 = \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx = \int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}dx = \int \left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int \left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx = x + 4\sqrt{x} + \ln|x| + C.$$

b) Ta có : $I_2 = \int \frac{x+x^2-e^x x^3}{x^3}dx = \int \left(\frac{x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{e^x x^3}{x^3}\right)dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-e^x\right)dx = \frac{-1}{x}+\ln|x|-e^x+C.$$

c) Ta có : $I_3 = \int 2^x.3^x dx = \int (2.3)^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6}+C.$

d) Ta có : $I_4 = \int \frac{e^x}{4^{\frac{x}{2}}}dx = \int \frac{e^x}{\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x}dx = \int \frac{e^x}{2^x}dx = \int \left(\frac{e}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}+C.$

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = xe^x$ và $F(x) = (ax+b)e^x$. Với giá trị nào của a và b thì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$?

Giải

Tập xác định của $F(x)$ và $f(x)$ là $\mathbb{R}$. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có : $F'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$ nên $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $(ax+a+b)e^x = xe^x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow ax+a+b = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (a-1)x+a+b=0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$. Vậy với $a=1$ và $b=-1$ thì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng $F(x) = \sin xe^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$.

Giải

Tập xác định của $F(x)$ và $f(x)$ là $\mathbb{R}$.

Ta có: $F'(x) = (\sin x)'e^x + \sin x(e^x)'$

$$= \cos xe^x + \sin xe^x = (\cos x + \sin x)e^x = f(x).$$

Vậy $F(x) = \sin xe^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$.

(đpcm)

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{25x^2+12x+1991}{x}dx$; b) $I_2 = \int \frac{15x+10\sqrt{x}+1983}{\sqrt[3]{x}}dx$.

c) $I_3 = \int \frac{(x^2+2)^2}{x^2}dx$; d) $I_4 = \int \left(x^5-2x+\frac{1}{x}\right)dx$.

2. Tính :

a) $I_1 = \int (3\sin x - 4\cos x)dx$; b) $I_2 = \int \left(\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$

c) $I_3 = \int \frac{\tan x}{\sin 2x}dx$; d) $I_4 = \int \left(\cot^2 x + \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL 13445 14

3. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{e^{2x}+3}{e^x} e^x dx$; b) $I_2 = \int \left(e^{x-2} + \frac{4^x}{3^x}\right) dx$

c) $I_3 = \int 3^x e^x dx$; d) $I_4 = \int \left(\frac{x^4 - xe^x}{x}\right) dx$.

4. Tính :

a) $I_1 = \int (\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x^2})dx$; b) $I_2 = \int (\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}})dx$

5. Cho hàm số $f(x) = (x^x + x)e^x$ và $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. Với giá trị nào của a, b và c thì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$?

Bài 2. BẢNG NGUYÊN HÀM MỞ RỘNG

Sau đây chúng ta sẽ mở rộng các công thức nguyên hàm cơ bản để được Bảng nguyên hàm mở rộng. Bảng nguyên hàm mở rộng là công cụ giúp chúng ta tính nhanh nguyên hàm và tích phân. Trước tiên ta xét định lí sau :

1. Định lí

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ *và* $u = u(x)$ *là hàm số có đạo hàm liên tục thì:*

$$\boxed{\int f(u(x)).u'(x)dx = F(u(x)) + C}.$$

2. Công thức nguyên hàm mở rộng

Áp dụng định lí trên trong trường hợp $u = ax + b\,(a \neq 0)$, ta có :

$$\int f(ax+b)dx = \int f(ax+b).(ax+b)'.\frac{1}{a}dx$$

$$= \frac{1}{a}\int f(ax+b).(ax+b)'dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Tóm lại, ta có công thức để mở rộng bảng nguyên hàm cơ bản:

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$$

Công thức nguyên hàm cơ bản và công thức nguyên hàm mở rộng được cho tương ứng dưới bảng sau :

Công thức nguyên hàm cơ bản	*Công thức nguyên hàm mở rộng*
$\int 0dx = C$	
$\int dx = x + C$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}.\ln\|ax+b\| + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C(\alpha > 0; \alpha \neq 1)$	$\int \alpha^{ax+b}dx = \frac{1}{a}.\frac{\alpha^{ax+b}}{\ln\alpha} + C(\alpha > 0; \alpha \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

Trong thực hành tính nguyên hàm cũng như tích phân sau này, ở nhiều trường hợp việc áp dụng bảng nguyên hàm mở rộng cho ta lời giải bài toán nhanh và " sáng " hơn ! Chẳng hạn với bài toán sau :

Tính nguyên hàm : $I = \int (2x+1)^4 dx$. Nếu không áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng thì ta khai triển biểu thức $(2x+1)^4$, sau đó mới áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản để tính :

$$I=\int(2x+1)^4dx=\int(2x+1)(2x+1)^3dx$$

$$=\int(2x+1)(8x^3+12x^2+6x+1)dx$$

$$=\int(16x^4+24x^3+12x^2+2x+8x^3+12x^2+6x+1)dx$$

$$=\int(16x^4+32x^3+24x^2+8x+1)dx$$

$$=\frac{16x^5}{5}+\frac{32x^4}{4}+\frac{24x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}+x+C$$

$$=\frac{16x^5}{5}+8x^4+8x^3+4x^2+x+C.$$

Bây giờ chúng ta áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng (công thức $\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$) để tính *I*, ta có :

$$I=\int(2x+1)^4dx=\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^{4+1}}{4+1}+C=\frac{(2x+1)^5}{10}+C.$$

(Chú ý rằng, cách này và cách trên đều cho kết quả đúng, nó chỉ sai khác nhau một hằng số xác định!)

Nếu bài toán trên ta thay số mũ 4 bằng số mũ 2013 chẳng hạn thì lời giải như cách đầu tiên sẽ phức tạp như thế nào? Còn nếu chúng ta áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng ta có ngay lời giải ngắn gọn cho bài toán đó là $I=\int(2x+1)^{2013}dx=\frac{(2x+1)^{2014}}{4028}+C$. Kể cả chúng ta dùng phương pháp đổi biến số (sẽ học ở bài sau) thì cũng có lời giải không gọn bằng cách này ! Rõ ràng công thức nguyên hàm mở rộng tỏ ra ưu điểm hơn công thức nguyên hàm cơ bản ! Các công thức nguyên hàm mở rộng, nếu chúng ta cho hệ số a = 1; $b=0$ thì ta thu được công thức nguyên hàm cơ bản.

Ví dụ 1. Tính :

a) $I_1=\int\left(2x+3\right)^{12}dx$; b) $I_2=\int\left(3-2x\right)^3dx$

c) $I_3=\int\frac{1}{\left(3x-1\right)^7}dx$; d) $I_4=\int\frac{2}{\sqrt[3]{\left(3x-2\right)^5}}dx$.

Giải

Áp dụng các công thức trong Bảng nguyên hàm mở rộng ta có :

a) $I_1=\int\left(2x+3\right)^{12}dx=\frac{1}{2}.\frac{\left(2x+3\right)^{13}}{13}+C=\frac{\left(2x+3\right)^{13}}{26}+C.$

b) $I_2=\int\left(3-2x\right)^3dx=\frac{1}{-2}.\frac{\left(3-2x\right)^4}{4}+C=\frac{-\left(3-2x\right)^4}{8}+C.$

c) $I_3=\int\frac{1}{\left(3x-1\right)^7}dx=\int\left(3x-1\right)^{-7}dx=\frac{1}{3}.\frac{\left(3x-1\right)^{-6}}{-6}+C$

$$=\frac{-1}{18\left(3x-1\right)^6}+C.$$

d) $I_4=\int\frac{2}{\sqrt[3]{(3x-2)^5}}dx=\int\frac{2}{(3x-2)^{\frac{5}{3}}}dx=2\int(3x-2)^{-\frac{5}{3}}dx$

$$=\frac{2}{3}.\frac{(3x-2)^{\frac{-5}{3}+1}}{\frac{-5}{3}+1}+C=\frac{-1}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}+C.$$

*** *Nhận xét :***

– *Chúng ta có thể trình bày nhanh như sau :*

a) $I_1=\int\left(2x+3\right)^{12}dx=\frac{\left(2x+3\right)^{13}}{26}+C.$

b) $I_2=\int\left(3-2x\right)^3dx=\frac{-\left(3-2x\right)^4}{8}+C.$

c) $I_3=\int\frac{1}{\left(3x-1\right)^7}dx=\int\left(3x-1\right)^{-7}dx=\frac{-1}{18\left(3x-1\right)^6}+C$

d) $I_4=\int\frac{2}{\sqrt[3]{(3x-2)^5}}dx=\frac{2}{3}.\frac{(3x-2)^{\frac{-5}{3}+1}}{\frac{-5}{3}+1}+C=\frac{-1}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}+C.$

– *Đối với Câu c) và câu d), nếu sử dụng công thức*

$$\boxed{\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{1}{a}.\frac{-1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C \ (n \neq 1; a \neq 0)}$$ *sẽ cho ta lời giải nhanh hơn nữa (vì giảm được một bước biến đổi) !*

c) $I_3 = \int \frac{1}{(3x-1)^7}\,dx = \frac{-1}{18(3x-1)^6} + C.$

d) $I_4 = \int \frac{2}{\sqrt[3]{(3x-2)^5}}\,dx = \frac{-1}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}} + C.$

– Nếu không áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng, chúng ta giải bài toán bằng phương pháp đổi biến số mà chúng ta sẽ xét trong bài học sau. Ở đây chúng ta đơn cử câu a) được giải bằng phương pháp đổi biến số để so sánh hai cách giải :

$$I_1 = \int (2x+3)^{12}\,dx$$

Đặt $u = 2x+3 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

Ta có : $I_1 = \int u^{12}\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}.\frac{u^{13}}{13} + C = \frac{u^{13}}{26} + C$

Thay $u = 2x+3$, ta được: $I_1 = \frac{(2x+3)^{13}}{26} + C.$

Rõ ràng cách này tỏ ra khá phức tạp so với một bài toán đơn giản như vậy ! Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng ta có lời giải gọn và nhanh hơn:

$$I_1 = \int (2x+3)^{12}\,dx = \frac{(2x+3)^{13}}{26} + C$$

Do vậy, việc nhớ và vận dụng tốt công thức nguyên hàm mở rộng là cần thiết để chúng ta tính nhanh được nguyên hàm và tích phân sau này.

Ví dụ 2. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1}{2-5x}\,dx$; b) $I_2 = \int 3^{1+5x}\,dx$

c) $I_3 = \int e^{-\frac{1}{3}x}\,dx$; d) $I_4 = \int e^{-x}\,dx$.

Giải

Áp dụng các công thức trong Bảng nguyên hàm mở rộng ta có :

a) $I_1 = \int \frac{1}{2-5x}\,dx = \frac{1}{-5}\ln|2-5x| + C = \frac{-1}{5}\ln|2-5x| + C.$

b) $I_2 = \int 3^{1+5x}\,dx = 3\int 3^{5x}\,dx = 3.\frac{1}{5}.\frac{3^{5x}}{\ln 3} + C = \frac{3}{5}.\frac{3^{5x}}{\ln 3} + C.$

c) $I_3 = \int e^{-\frac{1}{3}x}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}x} + C = -3e^{-\frac{1}{3}x} + C.$

d) $I_4 = \int e^{-x}\,dx = \frac{1}{-1}e^{-x} + C = -e^{-x} + C.$

– Chúng ta có thể trình bày nhanh như sau :

a) $I_1 = \int \frac{1}{2-5x}\,dx = \frac{-1}{5}\ln|2-5x| + C$

b) $I_2 = \int 3^{1+5x}\,dx = \int 3.3^{5x}\,dx = \frac{3}{5}.\frac{3^{5x}}{\ln 3} + C$

c) $I_3 = \int e^{-\frac{1}{3}x}\,dx = -3e^{-\frac{1}{3}x} + C.$

d) $I_4 = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

Ví dụ 3. Tính :

a) $I_1 = \int \sin(3-4x)\,dx$; b) $I_2 = \int 5\cos(\frac{-x}{3})\,dx$

c) $I_3 = \int \frac{1}{\cos^2(3x)}\,dx$; d) $I_4 = \int \frac{3}{\sin^2(2x-1)}\,dx$.

Giải

Áp dụng các công thức trong Bảng nguyên hàm mở rộng ta có :

a) $I_1 = \int \sin(3-4x)\,dx = \frac{1}{-4}.(-\cos(3-4x)) + C$

$= \frac{\cos(3-4x)}{4} + C.$

b) $I_2 = \int 5\cos\left(\frac{-x}{3}\right)dx = 5.\frac{1}{\frac{-1}{3}}.\sin\left(\frac{-x}{3}\right) + C = -15\sin\left(\frac{-x}{3}\right) + C$

c) $I_3 = \int \frac{1}{\cos^2(3x)}dx = \int \frac{1}{\cos^2(3.x)}dx = \frac{1}{3}\tan 3x + C\cdot$

d) $I_4 = \int \frac{3}{\sin^2(2x-1)}dx = 3.(-\frac{1}{2}\cot(2x-1)) + C$

$= -\frac{3}{2}\cot(2x-1) + C\cdot$

– Chúng ta có thể trình bày nhanh như sau :

a) $I_1 = \int \sin(3-4x)dx = \frac{\cos(3-4x)}{4} + C\cdot$

b) $I_2 = \int 5\cos(\frac{-x}{3})dx = -15\sin(\frac{-x}{3}) + C$

c) $I_3 = \int \frac{1}{\cos^2(3x)}dx = \frac{1}{3}\tan 3x + C\cdot$

d) $I_4 = \int \frac{3}{\sin^2(2x-1)}dx = -\frac{3}{2}\cot(2x-1) + C\cdot$

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1 = \int (4x+2)^6 dx$; b) $I_2 = \int \frac{5}{(3-2x)^7}dx$;

c) $I_3 = \int \frac{1}{\sqrt[3]{(4x+5)^3}}dx$; d) $I_4 = \int (4-2x)^5 dx$

2. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1}{1-x}dx$; b) $I_2 = \int 5^{2x-1}dx$

c) $I_2 = \int e^{-\frac{4}{3}x+5}dx$; d) $I_4 = \int \frac{7}{e^{-x+1}}dx\cdot$

3. Tính :

a) $I_1 = \int (\sin(3-\frac{x}{2}) + \cos 5x)dx$; b) $I_2 = \int \frac{3}{\cos^2(4-x)}dx$

c) $I_3 = \int \left(\frac{1}{\sin^2 3x} + \sin\frac{x}{2}\right)dx$; d) $I_4 = \int 2\cos(3-\frac{x}{4})dx\cdot$

Bài 3. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Bài này chúng ta sẽ xét hai trường hợp khi tính nguyên hàm $\int f(x)dx$ bằng phương pháp đổi biến số :

- *Trường hợp 1 :* ***Đặt u là một hàm số của x.***
- *Trường hợp 2 :* ***Đặt x là một hàm số của u.***

A. Phép đặt u là một hàm số của x : u = u(x)

Giả sử cần tính $I = \int f(x)dx$, ta thực hiện như sau :

Bước 1 : Chọn ẩn phụ thích hợp $u = u(x)$.

Bước 2 : Xác định vi phân $du = du(x)$ *hoặc* $du^2 = du^2(x)$ ...

Bước 3 : Biểu thị $f(x)dx$ *theo* u *và* du. *Giả sử rằng* $f(x)dx = g(u)du$.

Bước 4 : Tính $I = \int g(u)du$. *Sau đó thay* $u = u(x)$ *để được kết quả cần tìm.*

Chú ý : chọn ẩn phụ $u = u(x)$ sao cho việc tính $I = \int g(u)du$ phải dễ hơn là tính $I = \int f(x)dx$!

Khi nhìn vào một bài giải cho bài toán tính nguyên hàm hay tích phân bằng phương pháp đặt ẩn phụ (hay phương pháp đổi biến số), bạn đọc thường có câu hỏi : tại sao lại chọn đặt ẩn phụ như vậy? Làm sao chọn ẩn phụ thích hợp?... Những kiến thức dưới đây sẽ giúp các bạn định hướng được phép đặt ẩn phụ cho mình một cách nhanh chóng mà không phải mày mò làm giảm tốc độ tính nguyên hàm, tích phân của các bạn.

Trước tiên các bạn cần lưu ý hai kết quả mà chúng ta thường dùng sau đây :

(1) $\boxed{df(x) = f'(x)dx}$.

(2) *Nếu* $\int f(u)du = F(u) + C$ *và* $u = u(x)$ *là hàm số có đạo hàm liên tục thì:* $\boxed{\int f(u(x)).u'(x)du = \int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C}$

Ví dụ

a) $\int \cos(2x^2 + 3x + 1)d(2x^2 + 3x + 1) = \sin(2x^2 + 3x + 1) + C$.

(ta hiểu trong suy nghĩ " $2x^2 + 3x + 1$ *" là u)*

b) $\int \frac{1}{(x^2 + 1)} d(x^2 + 1) = \ln\left|x^2 + 1\right| + C = \ln(x^2 + 1) + C$ *vì* $x^2 + 1 > 0$ *(ta hiểu trong suy nghĩ "* $x^2 + 1$ *" là u)*

Sau đây chúng ta tìm hiểu các mối quan hệ quan trọng giúp chúng ta tìm nhanh phép đặt ẩn phụ và định hướng nhanh cách giải cho bài toán nguyên hàm, tích phân bằng phương pháp đổi biến số.

1. Quan hệ giữa x^n và x^{n+1} $(n \neq -1)$

Ta có : $dx^{n+1} = (n+1)x^n dx \Leftrightarrow x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1} = \frac{1}{a(n+1)} d(ax^{n+1} + b)$, trong đó $a \neq 0$ còn b tùy ý trên $\mathbb{R}$. Vậy ta có quan hệ giữa x^n và x^{n+1} $(n \neq -1)$ như sau : $\boxed{x^n dx = \frac{1}{a(n+1)} d(ax^{n+1} + b)}$ *(ta hiểu công thức trên một cách đơn giản như sau : đưa* x^n *vào trong vi phân thì thành* $(ax^{n+1} + b)$*, với* $a \neq 0$ *và b tùy ý trên* $\mathbb{R}$*)*

Ví dụ 1. Tính :

a) $I_1 = \int x^2(2x^3 + 1)^9 dx$; b) $I_2 = \int x\sqrt{x^2 + 1}dx$

Giải

a) ***Phân tích bài toán:*** *Theo lối giải thông thường, các bạn sẽ khai triển biểu thức* $(2x^3 + 1)^9$*, sau đó nhân với* x^2 *để đưa về nguyên hàm dễ tính hơn. Thế nhưng việc khai triển biểu thức* $(2x^3 + 1)^9$ *là không đơn giản? Do vậy, cách này đã tỏ ra không hiệu quả ! Nếu giải bài toán này bằng phương pháp đổi biến số, ta chọn ẩn phụ là* $u = 2x^3 + 1$*. Tại sao lại chọn được ẩn phụ như vậy? Bây giờ các bạn để ý quan hệ giữa* x^2 *và* x^3 *như sau :*

$x^2 dx = \frac{1}{6} d(2x^3 + 1)$, *nên ta có* $x^2(2x^3 + 1)^9 dx = \frac{1}{6}(2x^3 + 1)^9 d(2x^3 + 1)$.

Do đó, việc chúng ta chọn ẩn phụ là $u = 2x^3 + 1$ *là hoàn toàn tự nhiên, không mang tính áp đặt.*

Lời giải của bài toán

$I_1 = \int x^2(2x^3 + 1)^9 dx = \int \frac{1}{6}(2x^3 + 1)^9 d(2x^3 + 1)\cdot$

Đặt $u = 2x^3 + 1 \Rightarrow du = d(2x^3 + 1)$.

Ta có: $I_1 = \frac{1}{6}\int u^9 du = \frac{1}{6}.\frac{u^{10}}{10} + C = \frac{u^{10}}{60} + C\cdot$

Thay $u = 2x^3 + 1$ ta được: $I_1 = \frac{(2x^3 + 1)^{10}}{60} + C\cdot$

b) ***Phân tích bài toán:*** *Các bạn để ý quan hệ giữa* x *và* x^2*:* $xdx = \frac{1}{2} d(x^2 + 1)$ *nên ta có* $x\sqrt{x^2 + 1}dx = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}\, d(x^2 + 1)$*. Do vậy, ta có thể chọn ẩn phụ là* $u = x^2 + 1$ *hoặc* $u = \sqrt{x^2 + 1}$*. Trong trường hợp này ta nên chọn* $u = \sqrt{x^2 + 1}$ *để biểu thức dưới dấu nguyên hàm không còn căn thức.*

Lời giải của bài toán

$I_2 = \int x\sqrt{x^2 + 1}dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}\, d(x^2 + 1)$.

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow du^2 = d(x^2 + 1)$.

Ta có: $I_2 = \int \frac{1}{2} u\, du^2 = \int \frac{1}{2} u\, 2udu = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$.

Thay $u = \sqrt{x^2 + 1}$ ta được: $I_2 = \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^3}{3} + C\cdot$

Cách khác :

Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = d(x^2 + 1)$.

Ta có: $I_2 = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{u^3}}{3} + C$

Thay $u = x^2 + 1$ ta được: $I_2 = \frac{(\sqrt{x^2+1}\,)^3}{3} + C$.

**** Nhận xét :*** *Nếu đã thành thạo trong việc sử dụng phương pháp này, các bạn có thể trình bày lời giải nhanh hơn như sau :*

a) $I_1 = \int x^2(2x^3+1)^9 dx = \int \frac{1}{6}(2x^3+1)^9 d(2x^3+1)$

$= \frac{(2x^3+1)^{10}}{60} + C$. (ta hiểu trong suy nghĩ "$2x^3+1$" là "u")

b) $I_2 = \int x\sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} d(x^2+1)$

$= \frac{(\sqrt{x^2+1}\,)^3}{3} + C$. (ta hiểu trong suy nghĩ "x^2+1" là "u")

2. Quan hệ giữa $\frac{1}{x^2}$ và $\frac{1}{x}$

Ta có $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ nên quan hệ cần xét giữa $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{x^2}$ là:

$$\boxed{\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{a}d\left(\frac{a}{x} + b\right)}$$

(ta hiểu công thức trên một cách đơn giản như sau : đưa $\frac{1}{x^2}$ vào trong vi phân thì thành $\frac{a}{x} + b$, với $a \neq 0$ và b tùy ý trên $\mathbb{R}$)

Ví dụ 2. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{e^{1+\frac{3}{x}}}{x^2}dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$.

Giải

a) Phân tích bài toán : *Nếu chưa được biết đến quan hệ giữa $\frac{1}{x^2}$ và $\frac{1}{x}$ thì thật không dễ để chúng ta tìm ra ngay phép đặt ẩn phụ! Các bạn để ý quan hệ giữa $\frac{1}{x^2}$ và $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{3}d\left(1+\frac{3}{x}\right)$ nên ta có $\frac{e^{1+\frac{3}{x}}}{x^2}dx = \frac{-1}{3}e^{1+\frac{3}{x}}d\left(1+\frac{3}{x}\right)$.*

Do đó, ta có thể chọn ẩn phụ là $u = 1 + \frac{3}{x}$.

Lời giải của bài toán

$I_1 = \int \frac{e^{1+\frac{3}{x}}}{x^2}dx = \int\left(\frac{-1}{3}\right)e^{1+\frac{3}{x}}d\left(1+\frac{3}{x}\right)$

Đặt $u = 1 + \frac{3}{x} \Rightarrow du = d(1+\frac{3}{x})$.

Ta có: $I_1 = \frac{-1}{3}\int e^u du = \frac{-1}{3}e^u + C$.

Thay $u = 1 + \frac{3}{x}$ ta được: $I_1 = \frac{-1}{3}e^{1+\frac{3}{x}} + C$.

b) Phân tích bài toán : *Các bạn để ý quan hệ giữa $\frac{1}{x^2}$ và $\frac{1}{x}$:*

$\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$ nên ta có $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx = -\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$. Do đó, ta có thể chọn ẩn phụ là $u = \frac{1}{x}$.

Lời giải của bài toán

$I_2 = \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx = -\int \sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\int \sin\frac{2}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$.

Đặt $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = d\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ta có : $I_2 = -\frac{1}{2}\int \sin(2u)\,du = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2u) + C = \frac{1}{4}\cos 2u + C$.

Thay $u = \frac{1}{x}$ ta được: $I_2 = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2}{x}\right) + C$.

**** Nhận xét :** Nếu đã thành thạo trong việc sử dụng phương pháp này, các bạn có thể trình bày lời giải nhanh hơn như sau :*

a) $I_1 = \int \frac{e^{1+\frac{3}{x}}}{x^2}dx = \int\left(\frac{-1}{3}\right)e^{1+\frac{3}{x}}d\left(1+\frac{3}{x}\right) = \frac{-1}{3}e^{1+\frac{3}{x}} + C$.

b) $I_2 = \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx = -\int \sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\int \sin\frac{2}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2}{x}\right) + C\cdot$

3. Quan hệ giữa $\frac{1}{x}$ và ln*x*

Ta có $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ nên quan hệ cần xét giữa $\frac{1}{x}$ và $\ln x$ là :

$$\boxed{\frac{1}{x}dx = \frac{1}{a}d(a\ln x + b)}$$

(ta hiểu công thức trên một cách đơn giản như sau : đưa $\frac{1}{x}$ vào trong vi phân thì thành $(a\ln x + b)$, với a ≠ 0 và b tùy ý trên ℝ)

Ví dụ 3. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{(2\ln x + 3)^9}{x}dx$; b) $I_2 = \int \frac{2\ln^3 x + 5\ln^2 x}{x\ln x}dx$.

Giải :

a) Phân tích bài toán: *Các bạn để ý quan hệ giữa $\frac{1}{x}$ và $\ln x$:*

$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}d(2\ln x + 3)$ *nên ta có* $\frac{(2\ln x+3)^9}{x}dx = \frac{1}{2}(2\ln x+3)^9 d(2\ln x+3)$. *Do vậy, ta chọn ẩn phụ là u = 2lnx + 3.*

Lời giải của bài toán

$$I_1 = \int \frac{(2\ln x + 3)^9}{x}dx = \int \frac{1}{2}(2\ln x + 3)^9 d(2\ln x + 3).$$

Đặt $u = 2\ln x + 3 \Rightarrow du = d(2\ln x + 3)$.

Ta có: $I_1 = \frac{1}{2}\int u^9 du = \frac{1}{2}.\frac{u^{10}}{10} + C = \frac{u^{10}}{20} + C\cdot$

Thay $u = 2\ln x + 3$ ta được: $I_1 = \frac{(2\ln x + 3)^{10}}{20} + C\cdot$

b) Phân tích bài toán: *Các bạn để ý quan hệ giữa $\frac{1}{x}$ và $\ln x$: $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$*

nên ta có $\frac{2\ln^3 x + 5\ln^2 x}{x\ln x}dx = \frac{2\ln^3 x + 5\ln^2 x}{\ln x}d(\ln x)$. *Do vậy, ta chọn ẩn phụ là $u = \ln x$.*

Lời giải của bài toán

$$I_2 = \int \frac{2\ln^3 x + 5\ln^2 x}{x\ln x}dx = \int \frac{2\ln^3 x + 5\ln^2 x}{\ln x}d(\ln x)\cdot$$

Đặt u = lnx ⇒ du = d(lnx).

Ta có : $I_2 = \int \frac{2u^3 + 5u^2}{u}du = \int\left(\frac{2u^3}{u} + \frac{5u^2}{u}\right)du = \int (2u^2 + 5u)du$

$= \frac{2u^3}{3} + \frac{5u^2}{2} + C\cdot$

Thay u = lnx ta được : $I_2 = \frac{2(\ln x)^3}{3} + \frac{5(\ln x)^2}{2} + C\cdot$

**** Nhận xét :** Nếu đã thành thạo trong việc sử dụng phương pháp này, các bạn có thể trình bày lời giải nhanh hơn như sau:*

a) $I_1 = \int \frac{(2\ln x + 3)^9}{x}dx = \int \frac{1}{2}(2\ln x + 3)^9 d(2\ln x + 3)$

$= \frac{(2\ln x + 3)^{10}}{20} + C\cdot$

b) $I_2 = \int \frac{2\ln^3 x + 5\ln^2 x}{x\ln x}dx = \int \frac{2\ln^3 x + 5\ln^2 x}{\ln x}d(\ln x)$

$= \int\left[2(\ln x)^2 + 5\ln x\right]d(\ln x) = \frac{2(\ln x)^3}{3} + \frac{5(\ln x)^2}{2} + C\cdot$

4. Quan hệ giữa e^x và $ae^x + b$

Ta có $(ae^x + b) = ae^x$ nên quan hệ cần xét giữa e^x và $ae^x + b$ là:

$$\boxed{e^x dx = \frac{1}{a} d(ae^x + b)} \quad (a \neq 0)$$

(ta hiểu công thức trên một cách đơn giản như sau : đưa e^x vào trong vi phân thì thành $(ae^x + b)$, với $a \neq 0$ và b tùy ý trên $\mathbb{R}$)

Ví dụ 4. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{3e^x}{2e^x + 1} dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Các bạn để ý quan hệ giữa e^x và $2e^x + 1$:*

$e^x dx = \frac{1}{2} d(2e^x + 1)$ nên ta có

$$\frac{3e^x}{2e^x + 1} dx = \frac{3}{2e^x + 1}.e^x dx = \frac{3}{2e^x + 1}.\frac{1}{2} d(2e^x + 1)$$

$= \frac{3}{2}.\frac{1}{2e^x + 1} d(2e^x + 1)$. *Do vậy, ta chọn ẩn phụ là* $u = 2e^x + 1$.

Lời giải của bài toán

$$I_1 = \int \frac{3e^x}{2e^x + 1} dx = \int \frac{3}{2e^x + 1}.e^x dx = \int \frac{3}{2e^x + 1}.\frac{1}{2} d(2e^x + 1)$$

$$= \int \frac{3}{2}.\frac{1}{2e^x + 1} d(2e^x + 1) = \frac{3}{2} \int \frac{1}{2e^x + 1} d(2e^x + 1).$$

Đặt $u = 2e^x + 1 \Rightarrow du = d(2e^x + 1)$.

Ta có : $I_1 = \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{2} \ln|u| + C$.

Thay $u = 2e^x + 1$ ta được : $I_1 = \frac{3}{2} \ln(2e^x + 1) + C$. (ta không lấy dấu giá trị tuyệt đối vì $2e^x + 1 > 0$)

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta biến đổi*

$$I_2 = \int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x}{x^x + 1} dx$$

Các bạn để ý quan hệ giữa e^x và $e^x + 1$: $e^x dx = d(e^x + 1)$ nên ta có:

$$\frac{e^x}{e^x + 1} dx = \frac{1}{e^x + 1}.e^x dx = \frac{1}{e^x + 1} d(e^x + 1).$$

Do đó, ta chọn ẩn phụ là $u = e^x + 1$.

Lời giải của bài toán

$$I_2 = \int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{e^x + 1}.e^x dx$$

$$= \int \frac{1}{e^x + 1} d(e^x + 1).$$

Đặt $u = e^x + 1 \Rightarrow du = d(e^x + 1)$.

Ta có: $I_2 = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$.

Thay $u = e^x + 1$ ta được: $I_2 = \ln(e^x + 1) + C$.

**** Nhận xét :*** *Nếu đã thành thạo trong việc sử dụng phương pháp này, các bạn có thể trình bày lời giải nhanh hơn như sau:*

a) $I_1 = \int \frac{3e^x}{2e^x + 1} dx = \int \frac{3}{2e^x + 1}.\frac{1}{2} d(2e^x + 1) = \frac{3}{2} \ln(2e^x + 1) + C$.

b) $I_2 = \int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

$$= \int \frac{1}{e^x + 1} d(e^x + 1) = \ln(e^x + 1) + C.$$

5. Quan hệ giữa sinx và cosx

Ta có $(\sin x)' = \cos x$ và $(\cos x)' = -\sin x$ nên quan hệ cần xét giữa $\sin x$ và $\cos x$ là:

$$\boxed{\cos x dx = \frac{1}{a} d(a \sin x + b)} \quad \boxed{\sin x dx = -\frac{1}{a} d(a \cos x + b)}$$

(Ta hiểu công thức trên một cách đơn giản như sau: đưa $\cos x$ vào trong vi phân thành $(a\sin x + b)$; đưa sinx vào trong vi phân thành –(acosx + b), với $a \neq 0$ và b tùy ý trên $\mathbb{R}$)

Ví dụ 5.-Tính :

a) $I_1 = \int \cos^3 x \sin^2 x dx$; b) $I_2 = \int \cos x e^{-3\sin x+2} dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** Ta biến đổi :

$\cos^3 x \sin^2 x = \cos x \cos^2 x \sin^2 x = \cos x(1-\sin^2 x)\sin^2 x$.

Các bạn để ý quan hệ giữa sinx và cosx: cosxdx = d(sinx) nên ta có cosx(1 – sin²x)sin²xdx = (1 – sin²x)sin²xd(sinx). Do vậy, ta chọn ẩn phụ là u = sinx.

Lời giải của bài toán

$$I_1 = \int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos x \cos^2 x \sin^2 x dx$$
$$= \int \cos x(1-\sin^2 x)\sin^2 x dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^2 x d(\sin x).$$

Đặt u = sinx ⇒ du = d(sinx).

Ta có: $I_1 = \int (1-u^2)u^2 du = \int (u^2 - u^4) du = \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u^5}{5} + C$.

Thay u = sin*x* ta được: $I_1 = \dfrac{(\sin x)^3}{3} - \dfrac{(\sin x)^5}{5} + C$.

b) ***Phân tích bài toán :*** *Các bạn để ý quan hệ giữa sinx* và cosx:

$\cos x dx = \dfrac{-1}{3} d(-3\sin x + 2)$ *nên ta có*

$\cos x e^{-3\sin x+2} dx = \dfrac{-1}{3} e^{-3\sin x+2} d(-3\sin x + 2)$.

Do vậy, ta chọn ẩn phụ là u = –3sinx + 2.

Lời giải của bài toán

$$I_2 = \int \cos x e^{-3\sin x+2} dx = \int \frac{-1}{3} e^{-3\sin x+2} d(-3\sin x + 2).$$

Đặt $u = -3\sin x + 2 \Rightarrow du = d(-3\sin x + 2)$.

Ta có: $I_2 = \dfrac{-1}{3}\int e^u du = \dfrac{-1}{3} e^u + C$.

Thay $u = -3\sin x + 2$ ta được: $I_2 = \dfrac{-1}{3} e^{-3\sin x+2} + C$.

* ***Nhận xét :*** *Nếu đã thành thạo trong việc sử dụng phương pháp này, các bạn có thể trình bày lời giải nhanh hơn như sau :*

a) $I_1 = \int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)\sin^2 x dx$

$$= \int (1-\sin^2 x)\sin^2 x d(\sin x) = \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x)$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

b) $I_2 = \int \cos x e^{-3\sin x+2} dx = \int \dfrac{-1}{3} e^{-3\sin x+2} d(-3\sin x + 2)$

$$= \frac{-1}{3} e^{-3\sin x+2} + C.$$

6. Quan hệ giữa sin²x, cos²x và sin2x

Ta có $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ và $(\cos^2 x)' = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$

nên quan hệ cần xét giữa sin²x, cos²x và sin2x là :

$$\boxed{\sin 2x dx = \frac{1}{a} d(a\sin^2 x + b)} \quad \boxed{\sin 2x dx = -\frac{1}{a} d(a\cos^2 x + b)}$$

(ta hiểu công thức trên một cách đơn giản như sau: đưa sin2x vào trong vi phân thành $(a\sin^2 x + b)$ *hoặc* $-(a\cos^2 x + b)$*, với a ≠ 0 và b tùy ý trên* $\mathbb{R}$*)*

Ví dụ 6. Tính :

a) $I_1 = \int (3\sin^2 x + 1)\sin 2x dx$; b) $I_2 = \int \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}} dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Các bạn để ý quan hệ giữa sin²x* và sin2x:

$\sin 2x dx = \dfrac{1}{3} d(3\sin^2 x + 1)$ *nên ta có* $(3\sin^2 x + 1)\sin 2x dx$

$= \dfrac{1}{3}(3\sin^2 x + 1) d(3\sin^2 x + 1)$. *Do vậy, ta chọn ẩn phụ là u = 3sin²x + 1.*

Lời giải của bài toán :

$$I_1 = \int (3\sin^2 x + 1)\sin 2x dx = \int \frac{1}{3}(3\sin^2 x + 1) d(3\sin^2 x + 1).$$

Đặt $u = 3\sin^2 x + 1 \Rightarrow du = d(3\sin^2 x + 1)$.

Ta có : $I_1 = \frac{1}{3}\int u\,du = \frac{1}{3}.\frac{u^2}{2} + C = \frac{u^2}{6} + C$.

Thay $u = 3\sin^2 x + 1$ ta được : $I_1 = \frac{(3\sin^2 x+1)^2}{6} + C$.

b) ***Phân tích bài toán :*** Ta biến đổi:

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{2(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos^2 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$$

Các bạn để ý quan hệ giữa $\cos^2 x$ và sin2x: $\sin 2x\,dx = -d(2+\cos^2 x)$ *nên ta có* $\frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx = \frac{-1}{\sqrt{2+\cos^2 x}}d(2+\cos^2 x)$. *Do đó, ta có thể chọn ẩn phụ là* $u = 2+\cos^2 x$ *hoặc* $u=\sqrt{2+\cos^2 x}$. *Trong trường hợp này ta nên chọn* $u=\sqrt{2+\cos^2 x}$ *để biểu thức dưới dấu nguyên hàm không còn căn thức.*

Lời giải của bài toán :

$$I_2 = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x+3\cos^2 x}}dx = \int\frac{-1}{\sqrt{2+\cos^2 x}}d(2+\cos^2 x).$$

Đặt $u=\sqrt{2+\cos^2 x} \Rightarrow u^2 = 2+\cos^2 x \Rightarrow du^2 = d(2+\cos^2 x)$.

Ta có: $I_2 = \int\frac{-1}{u}du^2 = -\int\frac{2u}{u}du = -2\int du = -2u + C$.

Thay $u=\sqrt{2+\cos^2 x}$ ta được : $I_2 = -2\sqrt{2+\cos^2 x}+C$.

*** Cách khác :**

$$I_2 = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x+3\cos^2 x}}dx = \int\frac{-1}{\sqrt{2+\cos^2 x}}d(2+\cos^2 x).$$

Đặt $u = 2+\cos^2 x \Rightarrow du = d(2+\cos^2 x)$.

Ta có : $I_2 = \int\frac{-1}{\sqrt{u}}du = -2\sqrt{u} + C$ (chú ý công thức đạo hàm $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$).

Thay $u = 2 + \cos^2 x$ ta được: $I_2 = -2\sqrt{2+\cos^2 x}+C$.

**** Nhận xét :***

– Nếu đã thành thạo trong việc sử dụng phương pháp này, các bạn có thể trình bày lời giải nhanh hơn như sau :

a) $I_1 = \int(3\sin^2 x+1)\sin 2x\,dx = \int\frac{1}{3}(3\sin^2 x+1)\,d(3\sin^2 x+1)$

$= \frac{(3\sin^2 x+1)^2}{6}+C$.

b) $I_2 = \int\frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x+3\cos^2 x}}dx = \int\frac{-1}{\sqrt{2+\cos^2 x}}d(2+\cos^2 x)$

$= -\int(2+\cos^2 x)^{\frac{-1}{2}}d(2+\cos^2 x) = -2\sqrt{(2+\cos^2 x)}+C$

– Nếu chúng ta để ý đến quan hệ giữa $\sin x$ *và* $\cos x$ *thì chúng ta có thêm cách giải theo hướng khác như sau :*

a) $I_1 = \int(3\sin^2 x+1)\sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x(3\sin^2 x+1)\,dx$

$= \int 2\sin x(3\sin^2 x+1)\,d(\sin x) = \int(6\sin^3 x+2\sin x)\,d(\sin x)$

$= 6.\frac{\sin^4 x}{4}+2.\frac{\sin^2 x}{2}+C = \frac{3}{2}\sin^4 x+\sin^2 x+C$.

Chú ý rằng cách này và cách trên đều cho kết quả đúng, nó chỉ sai khác nhau một hằng số xác định !

b) $I_2 = \int\frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x+3\cos^2 x}}dx = \int\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx$ *(sau đó đưa sinx vào trong vi phân)*

$= \int\frac{-2\cos x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}d(\cos x) = -\int\frac{1}{\sqrt{2+\cos^2 x}}d(\cos^2 x)$

$= -\int(2+\cos^2 x)^{\frac{-1}{2}}d(2+\cos^2 x) = -\frac{(2+\cos^2 x)^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}+C$

$= -2(2+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}+C = -2\sqrt{(2+\cos^2 x)}+C$.

7. Quan hệ giữa $\frac{1}{\cos^2 x}$ và tanx , $\frac{1}{\sin^2 x}$ và cotx

Ta có $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ *và* $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ *nên quan hệ cần xét giữa* $\frac{1}{\cos^2 x}$ *và* $\tan x$, $\frac{1}{\sin^2 x}$ *và* $\cot x$ *là :*

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{a}d(a\tan x + b)} \qquad \boxed{\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{a}d(a\cot x + b)}$$

(ta hiểu công thức trên một cách đơn giản như sau : đưa $\frac{1}{\cos^2 x}$ *vào trong vi phân thành (atanx + b), đưa* $\frac{1}{\sin^2 x}$ *vào trong vi phân thành –(acotx + b), với a ≠ 0 và b tùy ý trên ℝ)*

Ví dụ 7. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{3\tan x + 4}{1 + \cos 2x}dx$; b) $I_2 = \int \left(\frac{\cot x}{\sin x}\right)^2 dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** Ta biến đổi

$$\frac{3\tan x + 4}{1 + \cos 2x} = \frac{3\tan x + 4}{2\cos^2 x} = \frac{(3\tan x + 4)}{2}\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Các bạn để ý quan hệ giữa $\frac{1}{\cos^2 x}$ *và* $\tan x$ *:* $\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{3}d(3\tan x + 4)$

nên ta có $\frac{(3\tan x + 4)}{2}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{(3\tan x + 4)}{2}\frac{1}{3}d(3\tan x + 4)$. *Do vậy, ta chọn ẩn phụ là* $u = 3\tan x + 4$.

Lời giải của bài toán

$$I_1 = \int \frac{3\tan x + 4}{1 + \cos 2x}dx = \int \frac{3\tan x + 4}{2\cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{(3\tan x + 4)}{2}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{(3\tan x + 4)}{2}\frac{1}{3}d(3\tan x + 4)$$

Đặt $u = 3\tan x + 4 \Rightarrow du = d(3\tan x + 4)$.

Ta có : $I_1 = \frac{1}{6}\int u du = \frac{1}{6}\frac{u^2}{2} + C = \frac{u^2}{12} + C$.

Thay $u = 3\tan x + 4$ ta được : $I_1 = \frac{(3\tan x + 4)^2}{12} + C$.

b) ***Phân tích bài toán :***

Ta biến đổi $\left(\frac{\cot x}{\sin x}\right)^2 = \frac{\cot^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x.\frac{1}{\sin^2 x}$. *Các bạn để ý quan hệ giữa* $\frac{1}{\sin^2 x}$ *và* $\cot x$ *:* $\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\cot x)$

nên ta có $\cot^2 x.\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot^2 x d(\cot x)$. *Do vậy, ta có thể chọn ẩn phụ là* $u = \cot x$.

Lời giải của bài toán

$$I_2 = \int \left(\frac{\cot x}{\sin x}\right)^2 dx = \int \frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \cot^2 x.\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$= -\int \cot^2 x d(\cot x).$$

Đặt $u = \cot x \Rightarrow du = d(\cot x)$.

Ta có: $I_2 = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C$.

Thay $u = \cot x$ ta được: $I_2 = -\frac{(\cot x)^3}{3} + C$.

**** Nhận xét :*** *Nếu đã thành thạo trong việc sử dụng phương pháp này, các bạn có thể trình bày lời giải nhanh hơn như sau :*

a) $I_1 = \int \frac{3\tan x + 4}{1 + \cos 2x}dx = \int \frac{3\tan x + 4}{2\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{(3\tan x + 4)}{2}\frac{1}{3}d(3\tan x + 4) = \frac{(3\tan x + 4)^2}{12} + C.$$

b) $I_2 = \int\left(\frac{\cot x}{\sin x}\right)^2 dx = \int \cot^2 x.\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot^2 x d(\cot x)$

$$= -\frac{(\cot x)^3}{3} + C.$$

Vậy là, chúng ta đã nghiên cứu xong 7 mối quan hệ cơ bản giúp chúng ta định hướng nhanh cách giải cho một bài toán nguyên hàm, cũng như tích phân sau này. Trong trường hợp bài toán không có xuất hiện một trong 7 mối quan hệ trên, chúng ta làm theo hướng giải khác, có tính chất tổng quát hơn như sau: ***đặt ẩn phụ u = u(x) để từ nguyên hàm theo biến x chúng ta biểu diễn được nguyên hàm đó theo biến u! (tức là ta cần biểu diễn biến "x" theo biến u, "dx" theo u và du)***

Mời các bạn theo dõi một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 8. Tính :

a) $I_1 = \int x(x+12)^{2012}dx$;   b) $I_2 = \int x^2(x+1)^7 dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Nếu khai triển* $(x+12)^{2012}$ *rồi nhân x vào để tính thì không khả thi rồi ! Ở đây chúng ta cũng không nhìn thấy sự xuất hiện của một trong 7 mối quan hệ để định hướng phép đặt ẩn phụ, nhưng theo hướng giải tổng quát, chúng ta chọn ẩn phụ là* $u = x + 12$ *thì từ nguyên hàm theo biến x chúng ta biểu diễn được nguyên hàm đó theo biến u rồi ! Vì từ* $u = x + 12$ *ta có* $x = u - 12$ *và* $dx = d(u-12) = du$ *(tức là* x *được biểu diễn theo* u *và* dx *được biểu diễn theo* du *).*

Lời giải của bài toán

Đặt $u = x + 12 \Rightarrow du = dx$ và $x = u - 12$.

Ta được :

$I_1 = \int (u-12)u^{2012}du = \int (u^{2013} - 12u^{2012})du = \frac{u^{2014}}{2014} - \frac{12u^{2013}}{2013} + C$

Thay $u = x + 12$ ta có : $I_1 = \frac{(x+12)^{2014}}{2014} - \frac{12(x+12)^{2013}}{2013} + C.$

b) ***Phân tích bài toán :*** *Đối với nguyên hàm này, việc sử dụng mối quan hệ giữa x và* x^2 *không đem lại lời giải thỏa đáng! Nhưng nếu chọn ẩn phụ là u = x + 1 thì từ nguyên hàm theo biến x chúng ta biểu diễn được nguyên hàm đó theo biến u rồi! Vì từ u = x + 1 ta có x = u – 1 và dx = d(u – 1) = du (tức là x được biểu diễn theo u và dx được biểu diễn theo du).*

Lời giải của bài toán

Đặt $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$ và $x = u - 1$.

Ta được :

$$I_2 = \int (u-1)^2u^7du = \int (u^2 - 2u + 1)u^7du = \int (u^9 - 2u^8 + u^7)du$$

$$= \frac{u^{10}}{10} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^8}{8} + C.$$

Thay $u = x + 1$ ta có :

$$I_2 = \frac{(x+1)^{10}}{10} - \frac{2(x+1)^9}{9} + \frac{(x+1)^8}{8} + C.$$

Ví dụ 9. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-2)^{12}}dx$;   b) $I_2 = \int \frac{x^5}{(2+x^3)^2}dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Trong bài này cũng vậy, sử dụng mối quan hệ giữa x và* x^2 *không đem lại lời giải thỏa đáng! Nếu chọn ẩn phụ là u = x – 2 thì từ nguyên hàm theo biến x chúng ta biểu diễn được nguyên hàm đó theo biến u! Vì từ u = x – 2 ta có x = u + 2 và dx = d(u + 2) = du (tức là x được biểu diễn theo u và dx được biểu diễn theo du).*

Lời giải của bài toán

Đặt $u = x - 2 \Rightarrow du = dx$ và $x = u + 2$.

Ta được :

$$I_1 = \int \frac{(u+2)^2+1}{u^{12}}du = \int \frac{u^2+4u+5}{u^{12}}du = \int \left(\frac{1}{u^{10}} + \frac{4}{u^{11}} + \frac{5}{u^{12}}\right)du$$

$$= \int (u^{-10} + 4u^{-11} + 5u^{-12})du = \frac{u^{-9}}{-9} + \frac{4u^{-10}}{-10} + \frac{5u^{-11}}{-11} + C$$

$$= \frac{-1}{9u^9} + \frac{-4}{10u^{10}} + \frac{-5}{11u^{11}} + C.$$

Thay $u = x - 2$ ta có :

$$I_1 = \frac{-1}{9(x-2)^9} + \frac{-4}{10(x-2)^{10}} + \frac{-5}{11(x-2)^{11}} + C.$$

*** Chú ý :** *Nếu áp dụng công thức* $\boxed{\int \frac{1}{x^n}dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C}$, *chúng ta có cách giải gọn hơn!*

$$I_1 = \int \frac{(u+2)^2+1}{u^{12}}du = \int \frac{u^2+4u+5}{u^{12}}du = \int (\frac{1}{u^{10}} + \frac{4}{u^{11}} + \frac{5}{u^{12}})du$$

$$= \frac{-1}{9u^9} + \frac{-4}{10u^{10}} + \frac{-5}{11u^{11}} + C.$$

Thay $u = x - 2$ ta có :

$$I_1 = \frac{-1}{9(x-2)^9} + \frac{-4}{10(x-2)^{10}} + \frac{-5}{11(x-2)^{11}} + C.$$

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta có biến đổi* $\frac{x^5}{(2+x^3)^2} = \frac{x^3}{(2+x^3)^2}.x^2$ *nên chúng ta có thể sử dụng mối quan hệ giữa* x^2 *và* x^3 *để định hướng phép đặt ẩn phụ:*

$x^2dx = \frac{1}{3}d(2+x^3).$

Ta có $\frac{x^5}{(2+x^3)^2}dx = \frac{x^3}{(2+x^3)^2}.x^2dx = \frac{1}{3}.\frac{x^3}{(2+x^3)^2}d(2+x^3)$, *vậy ta chọn ẩn phụ là* $u = 2 + x^3$.

Lời giải của bài toán

$$I_2 = \int \frac{x^5}{(2+x^3)^2}dx = \int \frac{x^3}{(2+x^3)^2}.x^2dx = \int \frac{x^3}{(2+x^3)^2}.\frac{1}{3}d(2+x^3)$$

Đặt $u = 2 + x^3 \Rightarrow du = d(2+x^3)$ và $x^3 = u - 2$.

Ta được :

$$I_2 = \frac{1}{3}\int \frac{u-2}{u^2}du = \frac{1}{3}\int (\frac{u}{u^2} - \frac{2}{u^2})du = \frac{1}{3}\int (\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2})du$$

$$= \frac{1}{3}(\ln|u| + \frac{2}{u}) + C.$$

Thay $u = 2 + x^3$ ta có : $I_2 = \frac{1}{3}(\ln|2+x^3| + \frac{2}{2+x^3}) + C.$

Ví dụ 10. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3}dx$; b) $I_2 = \int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Ta biến đổi*

$$\frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} = \frac{\cos x}{(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x})^3 \cos^3 x} = \frac{1}{(\tan x + 1)^3}\frac{1}{\cos^2 x}$$

Tới đây chúng ta có thể sử dụng quan hệ giữa $\frac{1}{\cos^2 x}$ *và tanx để chọn ẩn phụ thích hợp là u = tanx + 1.*

Lời giải của bài toán

Ta có :

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3}dx = \int \frac{\cos x}{(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x})^3 \cos^3 x}dx$$

$$= \int \frac{1}{(\tan x + 1)^3}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{(\tan x + 1)^3}d(\tan x + 1)$$

Đặt $u = \tan x + 1 \Rightarrow du = d(\tan x + 1)$.

Ta được : $I_1 = \int \frac{1}{u^3}du = \int u^{-3}du = \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2u^2} + C.$

Thay $u = \tan x + 1$ ta có: $I_1 = \frac{-1}{2(\tan x + 1)^2} + C.$

*** Nhận xét :**

– Trong bài toán này, phải thông qua một số phép biến đổi, chúng ta mới áp dụng được quan hệ giữa $\frac{1}{\cos^2 x}$ *và tanx để định hướng phép đặt ẩn phụ cũng như cách giải !*

– Các bạn có thể trình bày lời giải gọn hơn, với chú ý công thức

$$\boxed{\int \frac{1}{x^n}dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C}.$$

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3}dx = \int \frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right)^3 \cos^3 x}dx$$

$$= \int \frac{1}{(\tan x + 1)^3}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{(\tan x + 1)^3}d(\tan x + 1)$$

$$= \frac{-1}{2(\tan x + 1)^2} + C.$$

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta để ý quan hệ giữa* $\sin x$ *và* $\cos x$ *để định hướng phép đặt ẩn phụ :* $\sin x dx = -d(\cos x)$. *Ta có*

$$\sin^3 x\sqrt{\cos x}dx = \sin x \sin^2 x\sqrt{\cos x}dx$$

$$= \sin x(1 - \cos^2 x)\sqrt{\cos x}dx$$

$$= (1 - \cos^2 x)\sqrt{\cos x}d(-\cos x)$$

vậy ta chọn ẩn phụ là $u = \cos x$ *hoặc* $u = \sqrt{\cos x}$. *Trong trường hợp này chúng ta nên chọn* $u = \sqrt{\cos x}$ *để biểu thức dưới dấu nguyên hàm không còn chứa căn thức.*

Lời giải của bài toán

$$I_2 = \int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx = \int \sin x \sin^2 x\sqrt{\cos x}dx$$

$$= \int \sin x(1 - \cos^2 x)\sqrt{\cos x}dx = \int (1 - \cos^2 x)\sqrt{\cos x}d(-\cos x)$$

Đặt $u = \sqrt{\cos x} \Rightarrow u^2 = \cos x$ và $d(-\cos x) = d(-u^2)$.

Ta được: $I_2 = \int (1 - u^4)u d(-u^2) = \int (1 - u^4)u(-2u)du$

$$= \int (-2u^2 + 2u^6)du = \frac{-2u^3}{3} + \frac{2u^7}{7} + C.$$

Thay $u = \sqrt{\cos x}$ ta có : $I_2 = \dfrac{-2(\sqrt{\cos x})^3}{3} + \dfrac{2(\sqrt{\cos x})^7}{7} + C.$

* **Cách khác :** Nếu đặt $u = \cos x$ ta có cách giải khác như sau :

$$I_2 = \int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx = \int \sin x \sin^2 x\sqrt{\cos x}dx$$

$$= \int \sin x(1 - \cos^2 x)\sqrt{\cos x}dx = \int (1 - \cos^2 x)\sqrt{\cos x}d(-\cos x)$$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = d(\cos x)$.

Ta được : $I_2 = \int (1 - u^2)\sqrt{u}d(-u) = \int (1 - u^2)u^{\frac{1}{2}}d(-u) = -\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{2+\frac{1}{2}}\right)du$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Thay $u = \cos x$ ta có :

$$I_2 = \frac{2(\cos x)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{\cos x}\right)^7}{7} - \frac{2\left(\sqrt{\cos x}\right)^3}{3} + C.$$

Các bạn nhận thấy, bằng cách đặt $u = \sqrt{\cos x}$ *chúng ta có lời giải gọn hơn và không phức tạp như cách đặt* $u = \cos x$.

Ví dụ 11. Tính :

a) $I_1 = \int \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}dx$; b) $I_2 = \int x\sqrt{1 + x}dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Bài toán này sử dụng 7 quan hệ để định hướng phép đặt ẩn phụ là không khả thi. Nếu chọn ẩn phụ là* $u = \sqrt{1 - x}$ *thì từ nguyên hàm theo biến x chúng ta biểu diễn được nguyên hàm đó theo biến u vì từ* $u = \sqrt{1 - x}$ *ta suy ra* $x = 1 - u^2$ *và* $dx = d(1 - u^2) = -2udu$ *(tức là x được biểu diễn theo* u *; dx được biểu diễn theo u và du).*

Lời giải của bài toán

Đặt $u = \sqrt{1 - x} \Rightarrow u^2 = 1 - x$ hay $x = 1 - u^2 \Rightarrow dx = d(1 - u^2)$
$= -2udu.$

Ta được : $I_1 = -\int \dfrac{1 - u^2}{u}2udu = 2\int (u^2 - 1)du = 2\left(\dfrac{u^3}{3} - u\right) + C.$

Thay $u = \sqrt{1 - x}$ ta có: $I_1 = 2\left(\dfrac{(\sqrt{1 - x})^3}{3} - \sqrt{1 - x}\right) + C.$

b) Tương tự câu a), ta chọn ẩn phụ là $u = \sqrt{1 + x}$. *Lời giải của bài toán là*

Đặt $u = \sqrt{1 + x} \Rightarrow u^2 = 1 + x$ hay $x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = d(u^2 - 1)$
$= 2udu$

Ta được : $I_2 = \int x\sqrt{1+x}dx = \int (u^2-1)u.2udu$

$$= 2\int (u^4-u^2)du = 2(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3})+C$$

Thay $u=\sqrt{1+x}$ ta có: $I_2 = \frac{2(\sqrt{1+x})^5}{5} - \frac{2(\sqrt{1+x})^3}{3}+C$.

Ví dụ 12. Tính :

a) $I_1=\int\frac{dx}{e^x+1}$; b) $I_2 = \int \frac{1}{e^{2x}-e^x}dx$.

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Nếu chọn ẩn phụ là $u=e^x+1$ thì từ nguyên hàm theo biến x chúng ta biểu diễn được nguyên hàm đó theo biến u vì $du = d(e^x+1)=e^xdx$ mà $e^x=u-1$.*

Lời giải của bài toán

Đặt $u = e^x+1 \Leftrightarrow e^x = u-1 \Rightarrow du = d(e^x+1)=e^xdx$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}=\frac{du}{u-1}.$$

Ta được: $I_1 = \int\frac{du}{u(u-1)} = \int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du = \ln|u-1|-\ln|u|+C$

$$=\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|+C.$$

Thay $u=e^x+1$ ta có: $I_1 = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)+C$. *(ta không lấy dấu giá trị tuyệt đối vì $\frac{e^x}{e^x+1}>0$)*

b) ***Phân tích bài toán :*** *Chú ý rằng* $e^{2x}=(e^x)^2$, *tức là* e^{2x} *biểu diễn được qua* e^x. *Lại để ý* $de^x = e^xdx$ *hay* $\frac{de^x}{e^x}=dx$ *nên ta chọn ẩn phụ là* $u=e^x$.

Lời giải của bài toán

Đặt $u=e^x \Rightarrow du = de^x$.

Ta được: $I_2 = \int\frac{1}{u^2-u}.\frac{du}{u} = \int\frac{1}{u^2(u-1)}du = \int\frac{u^2-(u^2-1)}{u^2(u-1)}du$

$$=\int\left(\frac{u^2}{u^2(u-1)}-\frac{(u^2-1)}{u^2(u-1)}\right)du = \int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{u+1}{u^2}\right)du$$

$$=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du = \ln|u-1|-\ln|u|+\frac{1}{u}+C$$

$$=\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|+\frac{1}{u}+C$$

Thay $u=e^x$ ta có : $I_2=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+\frac{1}{e^x}+C$.

* ***Cách khác :*** *Các bạn để ý rằng* $\frac{1}{e^{2x}-e^x}=\frac{1}{e^{2x}(1-e^{-x})}=\frac{(e^{-x})^2}{1-e^{-x}}$ *và* $d(e^{-x})=-e^{-x}dx$ *hay* $-\frac{d(e^{-x})}{e^{-x}}=dx$ *thì ta chọn được ẩn phụ là* $u=e^{-x}$.

Ta có lời giải cho bài toán:

$$I_2=\int\frac{1}{e^{2x}-e^x}dx = \int\frac{1}{e^{2x}(1-e^{-x})}dx=\int\frac{(e^{-x})^2}{1-e^{-x}}dx$$

Đặt $u=e^{-x}\Rightarrow du = de^{-x} = -e^{-x}dx$ hay $\frac{du}{-u}=dx$.

Ta được: $I_2 = -\int\frac{u^2}{1-u}\frac{1}{u}du = \int\frac{u}{u-1}du$

$$=\int\frac{(u-1)+1}{u-1}du = \int\left(1+\frac{1}{u-1}\right)du = u+\ln|u-1|+C.$$

Thay $u=e^{-x}$ ta có :

$$I_2 = e^{-x}+\ln|e^{-x}-1|+C = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+\frac{1}{e^x}+C.$$

Sau đây, chúng ta tiếp tục xét một vài nguyên hàm giải được bằng phương pháp đổi biến số nhưng với cách đặt ẩn phụ đặc biệt !

Ví dụ 13. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2013}}$; b) $I_2 = \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Đặt* $u = \sqrt{x^2+2013} \Rightarrow u^2 = x^2+2013$ *và* $udu = xdx \Rightarrow dx = \frac{udu}{\sqrt{u^2-2013}}$*, rõ ràng phép đặt này có thể đổi biến từ biến "x" qua biến "u" được. Nhưng nguyên hàm theo biến "u" lại khá phức tạp! Không thỏa mãn điều kiện: chọn ẩn phụ* $u = u(x)$ *sao cho việc tính* $I = \int g(u)du$ *phải dễ hơn là tính* $I = \int f(x)dx$*. Tương tự trong trường hợp đặt* $u = x^2+2013$ *cũng vậy. Bây giờ ta xét cách đặt giải được bài toán.*

Lời giải của bài toán

Đặt $u + x = \sqrt{x^2+2013} \Rightarrow u^2 + 2ux + x^2 = x^2+2013$

$$\Rightarrow x = \frac{2013-u^2}{2u} = \frac{2013}{2u} - \frac{u}{2}$$

$$\Rightarrow u + x = \frac{2013}{2u} + \frac{u}{2}$$

và $dx = \left(\frac{-2013}{2u^2} - \frac{1}{2}\right)du$.

Ta có : $I_1 = \int \frac{1}{\frac{2013}{2u}+\frac{u}{2}}\left(\frac{-2013}{2u^2}-\frac{1}{2}\right)du = \int \frac{2u}{2013+u^2}\left(\frac{-2013-u^2}{2u^2}\right)du$

$$= -\int \frac{2013+u^2}{u(2013+u^2)}du = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + C.$$

Thay $u = \sqrt{x^2+2013} - x$ ta được :

$$I_1 = -\ln|\sqrt{x^2+2013} - x| + C$$

Cách khác :

Đặt $u - x = \sqrt{x^2+2013} \Rightarrow u^2 - 2ux + x^2 = x^2+2013$

$$\Rightarrow x = \frac{u^2-2013}{2u} = \frac{u}{2} - \frac{2013}{2u} \Rightarrow u - x = \frac{u}{2} + \frac{2013}{2u}$$

và $dx = \left(\frac{2013}{2u^2} + \frac{1}{2}\right)du$.

Ta có : $I_2 = \int \frac{1}{\frac{2013}{2u}+\frac{u}{2}}\left(\frac{2013}{2u^2}+\frac{1}{2}\right)du = \int \frac{2u}{2013+u^2}\left(\frac{2013+u^2}{2u^2}\right)du$

$$= \int \frac{2u(2013+u^2)}{2u^2(2013+u^2)}du = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C.$$

Thay $u = \sqrt{x^2+2013} + x$ ta được: $I_1 = \ln|\sqrt{x^2+2013} + x| + C$

* ***Lưu ý :***

– cách này và cách trên đều cho kết quả đúng, nó chỉ sai khác nhau một hằng số xác định !

Ta có: $I_1 = -\ln|\sqrt{x^2+2013} - x| + C$

$$= -\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+2013}-x)(\sqrt{x^2+2013}+x)}{(\sqrt{x^2+2013}+x)}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{x^2+2013-x^2}{\sqrt{x^2+2013}+x}\right| + C = -\ln\left|\frac{2013}{\sqrt{x^2+2013}+x}\right| + C$$

$$= -\left(\ln 2013 - \ln\left|\sqrt{x^2+2013}+x\right|\right) + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+2013}+x\right| - \ln 2013 + C.$$

– Ta chọn phép đặt $u + x = \sqrt{x^2+2013}$ *hoặc* $u - x = \sqrt{x^2+2013}$ *để khi bình phương hai vế ta triệt tiêu được* x^2 *và khử căn!*

– Nguyên hàm dạng $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ *là một nguyên hàm cơ bản nên cần thành thạo cách tính nó.*

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta biến đổi :* $\frac{x^2-1}{x^4+1} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}$ *(chia cả tử và mẫu cho* x^2*). Tới đây các bạn lại để ý rằng* $\left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2}$ *(chú ý quan hệ giữa* $\frac{1}{x}$ *và* $\frac{1}{x^2}$*) và* $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2$ *nên ta chọn ẩn phụ là* $u = x+\frac{1}{x}$.

Lời giải của bài toán

$$I_2 = \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

Đặt $u = x+\frac{1}{x} \Rightarrow du = (1-\frac{1}{x^2})dx$ và $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 = u^2-2$.

Ta có :

$$I_2 = \int\frac{du}{u^2-2} = \int \frac{du}{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|u-\sqrt{2}\right| - \ln\left|u+\sqrt{2}\right|\right)+C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+C\cdot$$

Thay $u = x+\frac{1}{x}$ ta được :

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+C$$

Ví dụ 14. Tính :

a) $I_1 = \int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; b) $I_2 = \int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Để ý các căn thức* $\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x+1}$ *theo thứ tự là căn bậc hai, căn bậc ba. Mà 6 là bội chung nhỏ nhất của 2 và 3 nên ta chọn ẩn phụ là* $u=\sqrt[6]{x+1}$ *hay* $x+1=u^6$ *để làm mất căn thức.*

Lời giải của bài toán

Đặt $u=\sqrt[6]{x+1} \Rightarrow u^6 = x+1$ và $6u^5du = dx$.

Ta có : $I_1 = \int\frac{(u^6-1)}{u^3+u^2}.6u^5du = 6\int\frac{u^3(u^6-1)}{u+1}du$

$$= 6\int\frac{u^3(u^3-1)(u^3+1)}{u+1}du$$

$$= 6\int\frac{u^3(u^3-1)(u+1)(u^2-u+1)}{u+1}du$$

$$= 6\int u^3(u^3-1)(u^2-u+1)du = 6\int(u^6-u^3)(u^2-u+1)du$$

$$= 6\int(u^8-u^7+u^6-u^5+u^4-u^3)du$$

$$= 6\left(\frac{u^9}{9}-\frac{u^8}{8}+\frac{u^7}{7}-\frac{u^6}{6}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^4}{4}\right)+C$$

Thay $u=\sqrt[6]{x+1}$ ta được :

$$I_1 = 6\left(\frac{(\sqrt[6]{x+1})^9}{9}-\frac{(\sqrt[6]{x+1})^8}{8}+\frac{(\sqrt[6]{x+1})^7}{7}-\frac{(\sqrt[6]{x+1})^6}{6}+\frac{(\sqrt[6]{x+1})^5}{5}-\frac{(\sqrt[6]{x+1})^4}{4}\right)+C$$

b) ***Phân tích bài toán :*** *Các bạn để ý rằng* $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{-2}{(x-1)^2}$ *hay* $d\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{-2}{(x-1)^2}dx \Leftrightarrow \frac{-1}{2}d\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{(x-1)^2}dx\cdot$ *Dó đó, ta chọn ẩn phụ là* $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

Lời giải của bài toán

Đặt $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow u^3=\frac{x+1}{x-1}$ và $3u^2du=\frac{-2}{(x-1)^2}dx$

hay $\frac{-3u^2}{2}du=\frac{1}{(x-1)^2}dx$.

Ta có : $I_2=\int u\left(\frac{-3u^2}{2}\right)du=\frac{-3}{2}\int u^3du=\frac{-3}{8}u^4+C$.

Thay $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ ta được :

$$I_2=\frac{-3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4+C=\frac{-3}{8}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.\frac{x+1}{x-1}+C.$$

Ví dụ 15. Tính :

a) $I_1=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$; b) $I_2=\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Hai cách đặt* $u=\sqrt{x^2+1}$ *và* $u=x^2+1$ *đều dẫn đến thất bại! Các bạn để ý* $\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}=\frac{xdx}{x^6.\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$ *nên nếu đặt* $u=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ thì ta có $u^2=\frac{x^2+1}{x^2}\Rightarrow x^2=\frac{1}{u^2-1}$ *Suy ra* $xdx=\frac{-udu}{(u^2-1)^2}$ *và* $x^6=(x^2)^3=\left(\frac{1}{u^2-1}\right)^3$. *Vậy ta đã đổi biến thành công (khử được căn thức).*

Lời giải của bài toán

Ta có : $I_1=\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}=\frac{xdx}{x^6.\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$

Đặt $u=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\Rightarrow u^2=\frac{x^2+1}{x^2}\Rightarrow x^2=\frac{1}{u^2-1}$

$$\Rightarrow 2xdx=\frac{-2udu}{(u^2-1)^2} \text{ hay } xdx=\frac{-udu}{(u^2-1)^2}.$$

Suy ra $I_1=\int\frac{1}{\left(\frac{1}{u^2-1}\right)^3.u}.\frac{-udu}{(u^2-1)^2}=\int(1-u^2)du=u-\frac{u^3}{3}+C$

Thay $u=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ta được $I_1=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^3}{3}+C$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3x^3}+C.$$

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta đặt ẩn phụ mà ta có thể tính x theo ẩn phụ đó!*

Lưu ý rằng $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=1$.

Lời giải của bài toán

Ta có : $I_2=\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$

Đặt $u=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$. Do $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=1$ nên

$$\frac{1}{u}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\Rightarrow u-\frac{1}{u}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

$$=2\sqrt{x} \text{ hay } \frac{u^2-1}{u}=2\sqrt{x}\Rightarrow x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2.$$

Suy ra : $dx=d\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2=2\left(\frac{u^2-1}{2u}\right).\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)'d$

$$=2\left(\frac{u^2-1}{2u}\right).\left(\frac{4u^2-2u^2+2}{4u^2}\right)du=\left(\frac{u^2-1}{u}\right).\left(\frac{u^2+1}{2u^2}\right)du$$

$$=\left(\frac{u^4-1}{2u^3}\right)du.$$

Ta được : $I_2 = \int \frac{1}{1+u}.\left(\frac{u^4-1}{2u^3}\right)du = \int \frac{(1+u)(u^3-u^2+u-1)}{2u^3(1+u)}du$

$$= \int \frac{u^3-u^2+u-1}{2u^3}du = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(u-\ln|u|-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right)+C.$$

Thay $u = \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ ta được :

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}-\ln\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right|+\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}\right)+C$$

$$= \sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+\frac{1}{4}+C.$$

(*Chú ý* $\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2} = \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2 = 2x-2\sqrt{x^2+x}+1$)

Tiếp theo, chúng ta sử dụng phương pháp đổi biến số để tính nguyên hàm có đặc điểm : *biểu thức dưới dấu nguyên hàm chứa biểu thức u(x) và đạo hàm bậc nhất của nó u'(x).* Chúng ta thường gặp trường hợp đặc biệt: *tử thức là đạo hàm của mẫu thức.* Khi đó ta chọn ẩn phụ là u = u(x) và tất nhiên ẩn phụ phải đảm bảo nguyên tắc : nguyên hàm mới theo biến u phải dễ tính hơn nguyên hàm ban đầu theo biến x.

Ví dụ 16. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{x(x-1)^4dx}{(x+1)^6}$; b) $I_2 = \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Các bạn để ý*

$$\frac{x(x-1)^4}{(x+1)^6}dx = x.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4.\frac{1}{(x+1)^2}dx \text{ và } \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Điều này có nghĩa là : biểu thức dưới dấu nguyên hàm chứa $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$ *và đạo hàm bậc nhất của nó* $u'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. *Ta chọn ẩn phụ là* $u = \frac{x-1}{x+1}$.

Lời giải của bài toán

Ta có: $I_1 = \int \frac{x(x-1)^4}{(x+1)^6}dx = \int x.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4.\frac{1}{(x+1)^2}dx$

Đặt $u = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{u+1}{-u+1} \Rightarrow du = \frac{2}{(x+1)^2}dx$.

Suy ra: $I_1 = \int \frac{u+1}{-u+1}.u^4.\frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\int \frac{u^5+u^4}{u-1}du$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(u-1)(u^4+2u^3+2u^2+2u+2)+2}{u-1}du$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(u^4+2u^3+2u^2+2u+2+\frac{2}{u-1}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}+2.\frac{u^4}{4}+2.\frac{u^3}{3}+2.\frac{u^2}{2}+2u+2\ln|u-1|\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{2}+\frac{2u^3}{3}+u^2+2u+2\ln|u-1|\right)+C.$$

Thay $u = \frac{x-1}{x+1}$ ta được :

$$I_2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4+\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2\ln\left|\frac{2}{x+1}\right|\right]+C.$$

* ***Cách khác :*** *Đặt* $u = x+1$ *(Các bạn tự làm, coi như một bài tập). Cách này sẽ gặp khó khăn nếu ta thay số mũ 4 và 6 bởi số mũ cao hơn, chẳng hạn* $I_1 = \int \frac{x(x-1)^9dx}{(x+1)^{11}}$.

b) ***Phân tích bài toán :***

Các bạn lưu ý $\left(1+xe^x\right)' = e^x + xe^x = e^x(1+x) = xe^x\left(\frac{1+x}{x}\right)$. *Điều này có nghĩa là: biểu thức dưới dấu nguyên hàm chứa* $u(x) = 1 + xe^x$ *và đạo hàm bậc nhất của nó* $u'(x) = xe^x\left(\frac{1+x}{x}\right) \Rightarrow \frac{1+x}{x} = \frac{u'(x)}{u(x)-1}$. *Ta chọn ẩn phụ là* $u = 1 + xe^x$.

Lời giải của bài toán

Ta có : $I_2 = \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx = \int \frac{1}{1+xe^x}.\frac{x+1}{x}dx$

Đặt $u = 1 + xe^x \Rightarrow du = e^x(x+1)dx = xe^x(\frac{x+1}{x})dx$

$\Rightarrow \frac{du}{xe^x} = (\frac{x+1}{x})dx$ hay $\Rightarrow \frac{du}{u-1} = (\frac{x+1}{x})dx$.

Suy ra : $I_2 = \int \frac{1}{u}\frac{du}{u-1} = \int \frac{1}{u(u-1)}du = \int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)du$

$$= \ln|u-1| - \ln|u| + C = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + C.$$

Thay $u = 1 + xe^x$ ta được $I_2 = \ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C$.

Ví dụ 17. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{2xdx}{x^4 + 2x^2 - 3}$; b) $I_2 = \int \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}dx$

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Các bạn để ý* $x^4 + 2x^2 - 3 = (x^2+1)^2 - 4$ *và* $\left(x^2+1\right)' = 2x$. *Điều này có nghĩa là: biểu thức dưới dấu nguyên hàm chứa* $u(x) = x^2 + 1$ *và đạo hàm bậc nhất của nó* $u'(x) = 2x$. *Ta chọn ẩn phụ là* $u = x^2 + 1$.

Lời giải của bài toán

Ta có: $I_1 = \int \frac{2xdx}{x^4 + 2x^2 - 3} = \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2 - 4}$

Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$.

Suy ra: $I_1 = \int \frac{du}{u^2 - 2^2} = \int \frac{du}{(u-2)(u+2)} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)du$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-2| - \ln|u+2|\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C.$$

Thay $u = x^2 + 1$ ta được: $I_1 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}\right| + C.$

* ***Lưu ý :*** *Ta có thể hiểu theo hướng quan hệ giữa x và* x^2 *để định hướng cách chọn ẩn phụ !*

* ***Cách khác :*** *(các bạn xem trong phần phương pháp biến đổi)*

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta biến đổi*

$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = \left[(x^2)^2 + x^2 + 1^2 + 2x^2.x + 2x.1 + 2x^2.1\right] - 4$

$= (x^2 + x + 1)^2 - 4$ và $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$. *Điều này có nghĩa là: biểu thức dưới dấu nguyên hàm chứa* $u(x) = x^2 + x + 1$ *và đạo hàm bậc nhất của nó* $u'(x) = 2x + 1$. *Ta chọn ẩn phụ là* $u = x^2 + x + 1$.

Lời giải của bài toán

Ta có $I_2 = \int \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}dx = \int \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)^2 - 4}dx$

Đặt $u = x^2 + x + 1 \Rightarrow du = (2x+1)dx$.

Suy ra: $I_2 = \int \frac{du}{u^2 - 4} = \int \frac{1}{(u-2)(u+2)}du = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)du$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-2| - \ln|u+2|\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C.$$

Thay $u = x^2 + x + 1$ ta được: $I_2 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 3}\right| + C.$

**** Lưu ý :** Nguyên hàm cơ bản thường được áp dụng (các bạn xem cách tính trong bài " phương pháp biến đổi") :*

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C} \qquad (a>0).$$

– Ta có thể trình bày lời giải nhanh như sau :

a) $$I_1 = \int \frac{2x\,dx}{x^4+2x^2-3} = \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2-4}$$

$$= \int \frac{d(x^2+1)}{\left[(x^2+1)-2\right]\left[(x^2+1)+2\right]}$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{\left[(x^2+1)-2\right]} - \frac{1}{\left[(x^2+1)+2\right]}\right) d(x^2+1)$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left[(x^2+1)-2\right]}{\left[(x^2+1)+2\right]}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}\right| + C.$$

b) $$I_2 = \int \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2-4}$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+x-1)(x^2+x+3)}\,d(x^2+x+1)$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x^2+x-1} - \frac{1}{x^2+x+3}\right) d(x^2+x)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{x^2+x-1}\,d(x^2+x-1) - \int \frac{1}{x^2+x+3}\,d(x^2+x+3)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|x^2+x-1\right| - \ln\left|x^2+x+3\right|\right] = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+x-1}{x^2+x+3}\right| + C.$$

Ví dụ 18. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$;   b) $I_2 = \int \frac{\sin 2x(\sin x + \cos x)}{\sqrt{\sin x - \cos x}}\,dx$

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Các bạn để ý* $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$*. Điều này có nghĩa là: biểu thức dưới dấu nguyên hàm chứa* $u(x) = 1+\sqrt{x}$ *hoặc* $u(x) = \sqrt{x}$ *và đạo hàm bậc nhất của nó* $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$*. Ta chọn ẩn phụ là* $u = 1+\sqrt{x}$.

Lời giải của bài toán

Ta có: $$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

Đặt $u = 1+\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Suy ra : $I_1 = \int \frac{2du}{u^2} = \frac{-2}{u} + C$.

Thay $u = 1+\sqrt{x}$ ta được: $I_1 = \frac{-2}{1+\sqrt{x}} + C$.

**** Cách khác :** Đặt* $u = \sqrt{x}$ *(các bạn tự trình bày)*

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta có* $(\sin x - \cos x)' = \sin x + \cos x$ *và lưu ý* $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$*. Điều này có nghĩa là: biểu thức dưới dấu nguyên hàm chứa* $u(x) = \sin x - \cos x$ *và đạo hàm bậc nhất của nó* $u'(x) = \sin x + \cos x$*. Ta chọn ẩn phụ là* $u = \sin x - \cos x$ *hoặc* $u = \sqrt{\sin x - \cos x}$*. Ta nên chọn* $u = \sqrt{\sin x - \cos x}$ *để nguyên hàm theo biến u không còn chứa dấu căn thức!*

Lời giải của bài toán

Ta có $$I_2 = \int \frac{\sin 2x(\sin x + \cos x)}{\sqrt{\sin x - \cos x}}\,dx$$

$$= \int \frac{\left[1-(\sin x - \cos x)^2\right](\sin x + \cos x)}{\sqrt{\sin x - \cos x}}\,dx$$

Đặt $u = \sqrt{\sin x - \cos x} \Rightarrow u^2 = (\sin x - \cos x)$ và

$2udu = (\sin x + \cos x)dx$.

Suy ra: $I_2 = \int \frac{(1-u^4)}{u}2udu = 2\int(1-u^4)du = 2u - \frac{2u^5}{5} + C$

Thay $u = \sqrt{\sin x - \cos x}$ ta được:

$$I_2 = 2\sqrt{\sin x - \cos x} - \frac{2(\sqrt{\sin x - \cos x})^5}{5} + C.$$

– Ta có thể trình bày lời giải nhanh như sau :

a) $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \int \frac{2d(1+\sqrt{x})}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-2}{1+\sqrt{x}} + C$.

b) $I_2 = \int \frac{\sin 2x(\sin x + \cos x)}{\sqrt{\sin x - \cos x}}dx$

$$= \int \frac{\left[1-(\sin x - \cos x)^2\right]d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{\sin x - \cos x}}$$

$$= \int \left[\frac{1}{\sqrt{\sin x - \cos x}} - \sqrt{(\sin x - \cos x)^3}\right]d(\sin x - \cos x)$$

$$= 2\sqrt{\sin x - \cos x} - \frac{2(\sqrt{\sin x - \cos x})^5}{5} + C.$$

7. Phép đặt x là một hàm số của u : $x = \varphi(u)$

Giả sử cần tính $I = \int f(x)dx$, ta thực hiện như sau :

Bước 1 : Chọn ẩn phụ thích hợp $x = \varphi(u)$.(theo dấu hiệu cho trong bảng dưới)

Bước 2 : Xác định vi phân $dx = d\varphi(u) = \varphi'(u)du$.

Bước 3 : Biểu thị $f(x)dx$ theo u và du. Giả sử rằng $f(x)dx = g(u)du$.

Bước 4 : Tính $I = \int g(u)du$.

***Chú ý :** chọn ẩn phụ $x = \varphi(u)$ sao cho việc tính $I = \int g(u)du$ phải dễ hơn là tính $I = \int f(x)dx$! Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ theo kiểu trên được cho dưới bảng sau:

Dấu hiệu	Cách chọn ẩn phụ
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = \lvert a\rvert \sin u \ (-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2})$ $x = \lvert a\rvert \cos u \ (0 \le u \le \pi)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin u}\left(u \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}\right)$ $x = \frac{\lvert a\rvert}{\cos u}\left(u \in [0;\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}\right)$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = \lvert a\rvert \tan u \ (-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2})$ $x = \lvert a\rvert \cot u \ (0 < u < \pi)$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos 2u$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 u$

Chúng ta xét các ví dụ minh họa !

Ví dụ 1. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

Giải

*a) **Phân tích bài toán :** Ta nhìn thấy dấu hiệu* $\sqrt{(1-x^2)^3}$ *nên chọn ẩn phụ là* $x = \sin u \ (-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2})$. *Ta không lấy* $u = -\frac{\pi}{2}; u = \frac{\pi}{2}$ *vì điều kiện* $x \ne \pm 1$.

Lời giải của bài toán

Đặt $x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u du$;

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 u)^3}}\cos u du = \frac{1}{\sqrt{(\cos^2 u)^3}}\cos u du$$

$$= \frac{1}{\left|\cos u\right|^3}\cos u du = \frac{1}{\cos^2 u}du = d(\tan u).$$

Khi đó: $I_1 = \int d(\tan u) = \tan u + C = \frac{\sin x}{\cos x} + C$.

Vậy $I_1 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

* ***Chú ý:*** *Ta có* $\sqrt{(1-x^2)^3} = \sqrt{(1-\sin^2 u)^3} = \sqrt{(\cos^2 u)^3} = \left|\cos u\right|^3 = \cos^3 u$ *và* $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ vì: $(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2})$ *nên* $\cos u > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 u} = \cos u \\ \cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$.

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta nhìn thấy dấu hiệu* x^2+1 *nên chọn ẩn phụ là* $x = \tan u\ (-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2})$.

Lời giải của bài toán

Đặt $x = \tan u \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 u}du$;

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx = \frac{1}{\sqrt{(\tan^2 u+1)^3}}.\frac{1}{\cos^2 u}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^3}}.\frac{1}{\cos^2 u}du = \frac{1}{\frac{1}{\cos^3 u}}.\frac{1}{\cos^2 u}du = \cos u du.$$

Ta được: $I_2 = \int \cos u du = \sin u + C$.

Vậy $I_2 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

* ***Chú ý :***

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u$ *và* $\sin u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *vì* $(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2})$ *nên* $\cos u > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 u} = \cos u \\ \sin u = \tan u.\cos u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

(lưu ý $\tan u = x$; $\cos u = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 u+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$*)*

Ví dụ 2. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

Giải

a) ***Phân tích bài toán :*** *Để ý các căn thức* $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ *theo thứ tự là căn bậc hai, căn bậc ba. Mà 6 là bội chung nhỏ nhất của 2; 3 nên ta có thể chọn ẩn phụ để làm mất căn thức là* $x = u^6$.

Lời giải của bài toán :

Đặt $x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5du$.

$$\text{Ta có : } I_1 = \int \frac{1}{u^2+u^3}6u^5du = 6\int \frac{u^3}{u+1}du = 6\int \frac{(u^3+1)-1}{u+1}du$$

$$= 6\int \frac{(u^3+1)-1}{u+1}du = 6\int \frac{(u+1)(u^2-u+1)-1}{u+1}du$$

$$= 6\int\left((u^2-u+1) - \frac{1}{u+1}\right)du = 6\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u\right) - 6\ln|u+1| + C$$

Thay $u = \sqrt[6]{x}$, ta có :

$$I_1 = 6\left(\frac{(\sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{(\sqrt[6]{x})^2}{2} + \sqrt[6]{x}\right) - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

b) ***Phân tích bài toán :*** *Ta nhìn thấy dấu hiệu* x^2+1 *nên chọn ẩn phụ là* $x = \tan u\ (-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2})$.

Lời giải của bài toán

Đặt $x = \tan u \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 u}du$.

Ta có: $I_2 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\tan u\sqrt{\tan^2 u+1}}.\frac{1}{\cos^2 u}du$

$$= \int \frac{1}{\tan u\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}}.\frac{1}{\cos^2 u}du = \int \frac{1}{\tan u\frac{1}{|\cos u|}}.\frac{1}{\cos^2 u}du$$

$$= \int\frac{1}{\sin u}du = \int \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du = \int \frac{1}{2\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}.\cos^2\frac{u}{2}}du$$

$$= \int \frac{1}{2\tan\frac{u}{2}.\cos^2\frac{u}{2}}du = \int \frac{1}{\tan\frac{u}{2}}d\left(\tan\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + C$$

Lại có: $\tan\frac{u}{2} = \frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}} = \frac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1+\cos u}$.

Mà $\tan u = x$ nên $\sin u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ và $\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (vì ta luôn có $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$).

Vậy $\tan\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1+\cos u} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. Suy ra

$I_2 = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right| + C$.

*** Cách khác :** Ta chú ý biến đổi $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$ và sử dụng quan hệ giữa x^2 và x ta chọn ẩn phụ là $u = \sqrt{x^2+1}$. Vậy lời giải khác cho bài toán là :

$$I_2 = \int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$$

Đặt $u = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow u^2 = x^2+1 \Rightarrow udu = xdx$

Ta có : $I_2 = \int\frac{udu}{(u^2-1)u} = \int\frac{du}{u^2-1} = \int\frac{du}{(u-1)(u+1)}$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

Thay $u = \sqrt{x^2+1}$ ta được: $I_2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| + C$.

**** Lưu ý :***

– Hai cách đều cho ta kết quả đúng:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| = \frac{1}{2}\left(\ln|\sqrt{x^2+1}-1| - \ln\left|\sqrt{x^2+1}+1\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}+1)}\right| - \ln\left|\sqrt{x^2+1}+1\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| - \ln\left|\sqrt{x^2+1}+1\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x^2| - \ln|\sqrt{x^2+1}+1| - \ln\left|\sqrt{x^2+1}+1\right|\right)$$

$$= \ln|x| - \ln|\sqrt{x^2+1}+1| = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{x(\sqrt{x^2+1}-1)}{(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+1}-1)}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|$$

– Những ví dụ minh họa cho các phép đặt tiếp theo, các bạn theo dõi trong phần tích phân !

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1 = \int x^3(x^4+1)^5 dx$; b) $I_2 = \int \frac{x^7}{(x^4+1)^2} dx$

c) $I_3 = \int \frac{x^7}{(x^8+1)^2} dx$; d) $I_2 = \int x^3\sqrt{x^2+1}dx$

HD : Sử dụng quan hệ giữa x^n và x^{n+1} $(n \neq -1)$.

2. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{x^2}\cos(\frac{2}{x} - 5)dx$

c) $I_3 = \int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+1\right)}{3x^2} dx$; d) $I_4 = \int \frac{2}{x^2} e^{1-\frac{1}{x}} dx$

HD : Sử dụng quan hệ giữa $\frac{1}{x^2}$ và $\frac{1}{x}$.

3. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{\sqrt{2\ln x + 3}}{x} dx$; b) $I_2 = \int \frac{2\ln^3 x + \ln x}{x} dx$

c) $I_3 = \int \frac{\ln x\sqrt{\ln x + 1}}{x} dx$; c) $I_2 = \int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$.

HD : Sử dụng quan hệ giữa $\frac{1}{x}$ và $\ln x$.

4. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$; b) $I_2 = \int \frac{e^x}{1 + e^{-x}} dx$

HD: Sử dụng quan hệ giữa e^x và $ae^x + b$.

5. Tính :

a) $I_1 = \int \cos x \sin^2 x dx$; b) $I_2 = \int \sin x e^{\cos x + 1} dx$

c) $I_3 = \int \cos^3 x dx$; d) $I_2 = \int \sin^3 x dx$.

HD : Sử dụng quan hệ giữa sinx và cosx.

6. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{\sin 2x}{2\sin^2 x + 1} dx$; b) $I_2 = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 x}} dx$

HD : Sử dụng quan hệ giữa $\sin^2$x, $\cos^2$x và sin2x.

7. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x - \sin x \cos x} dx$

HD : Sử dụng quan hệ giữa $\frac{1}{\cos^2 x}$ và $\tan x$, $\frac{1}{\sin^2 x}$ và $\cot x$.

8. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$; b) $I_2 = \int \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} dx$

9. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$

10. Tính :

a) $I_1 = \int \sqrt{4 - x^2} dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} dx$

Bài 4. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

Phần này chúng ta sẽ kết hợp các cách trình bày ở những bài trên với các kỹ thuật phân tích, biến đổi để tính nhanh bài toán nguyên hàm cũng như bài toán tích phân sau này.

Trong quá trình làm toán chúng ta thường gặp nguyên hàm cơ bản dưới đây. Do đó các bạn cần thành thạo trong việc tính nguyên hàm dạng bày.

Bài toán cơ bản : Tính $I = \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx \quad (a > 0)$

Giải

Ta có $I = \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)} dx$

$$= \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{x-a} d(x-a) - \int \frac{1}{x+a} d(x+a) \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\ln|x-a| - \ln|x+a| \right] + C = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Vậy $\boxed{\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C} \quad (a > 0)$

1. Sử dụng kỹ thuật phân tích, tách, thêm bớt…

Ví dụ 1. Tính :

a) $I_1 = \int x(1-x)^{2013} dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{x(x^5+1)} dx$

Giải

a) Ta có : $x(1-x)^{2013} = -\left[(x-1)+1\right](x-1)^{2013} = -(x-1)^{2014} - (x-1)^{2013}$

Suy ra $I_1 = -\int \left[(x-1)^{2014} + (x-1)^{2013} \right] dx$

$$= -\int (x-1)^{2014} d(x-1) - \int (x-1)^{2013} d(x-1)$$

$$= -\frac{(x-1)^{2015}}{2015} - \frac{(x-1)^{2014}}{2014} + C.$$

* ***Cách khác :***

Đặt $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$.

Ta có : $I_1 = -\int (1-u) u^{2013} du = \int \left(u^{2014} - u^{2013} \right) du = \frac{u^{2015}}{2015} - \frac{u^{2014}}{2014} + C$

Thay $u = 1 - x$ ta được : $I_1 = \frac{(1-x)^{2015}}{2015} - \frac{(1-x)^{2014}}{2014} + C$.

b) Ta có: $\frac{1}{x(x^5+1)} = \frac{(x^5+1) - x^5}{x(x^5+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^4}{x^5+1}$.

Suy ra $I_2 = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^4}{x^5+1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x^4}{x^5+1} dx$

$$= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^5+1} d(x^5+1)$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{5} \ln\left| x^5 + 1 \right| + C.$$

* ***Cách khác :*** sử dụng quan hệ giữa x^4 và x^5.

Đặt $u = x^5 + 1 \Rightarrow du = 5x^4 dx$.

Ta có : $I_2 = \int \frac{1}{x(x^5+1)} dx = \int \frac{x^4}{x^5(x^5+1)} dx$

Suy ra $I_2 = \frac{1}{5} \int \frac{1}{(u-1)u} du = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du$

$$= \frac{1}{5} \left(\ln|u-1| - \ln|u| \right) + C = \frac{1}{5} \ln\left| \frac{u-1}{u} \right| + C.$$

Thay $u = x^5 + 1$ ta được :

$$I_2 = \frac{1}{5} \ln\left| \frac{x^5}{x^5+1} \right| + C = \frac{1}{5} \ln\left| x^5 \right| - \frac{1}{5} \ln\left| x^5 + 1 \right| + C$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{5} \ln\left| x^5 + 1 \right| + C.$$

* ***Nhận xét :*** *Cách đầu tiên cho ta lời giải "sáng" hơn!*

Ví dụ 2. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$;   b) $I_2 = \int \frac{1}{x^5+x^3}dx$

Giải

a) Ta có: $\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \int \frac{\left[(x+1)-1\right]^2}{(x+1)^3}dx = \int\left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3} - 2\frac{x+1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right]dx$

$$= \int\left[\frac{1}{x+1} - 2\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}\right]dx = \int\frac{d(x+1)}{x+1} - 2\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + \int\frac{d(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$= \ln|x+1| + 2.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{(x+1)^2} + C.$$

* ***Cách khác :***

Đặt $u = x+1 \Rightarrow du = dx$.

Ta có: $I_1 = \int\frac{(u-1)^2}{u^3}du = \int\frac{u^2-2u+1}{u^3}du = \int\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3}\right)du$

$$= \int\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3}\right)du = \ln|u| + \frac{2}{u} - \frac{1}{2u^2} + C$$

Thay $u = x+1$ ta được: $I_1 = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$.

b) Ta có :

$$I_2 = \int\frac{1}{x^5+x^3}dx = \int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^3(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x(x^2+1)}\right)dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{(x^2+1)-x^2}{x(x^2+1)}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{1}{x^3}dx - \int\frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)$$

$$= \frac{-1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

* ***Cách khác :*** sử dụng quan hệ giữa x và x^2.

Ta có : $I_2 = \int\frac{1}{x^5+x^3}dx = \int\frac{1}{x^3(x^2+1)}dx = \int\frac{x}{(x^2)^2(x^2+1)}dx$

Đặt $u = x^2+1 \Rightarrow du = 2xdx$.

Suy ra $I_2 = \frac{1}{2}\int\frac{1}{(u-1)^2u}du = -\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)-u}{(u-1)^2u}du$

$$= -\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{(u-1)u} - \frac{1}{(u-1)^2}\right]du = -\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{(u-1)^2}\right]du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{u-1}d(u-1) - \int\frac{1}{u}du - \int\frac{1}{(u-1)^2}du\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln|u-1| - \ln|u| + \frac{1}{u-1}\right] + C.$$

Thay $u = x^2+1$ ta được: $I_2 = -\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2\right| - \ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{x^2}\right] + C$

$$= \frac{-1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

* ***Nhận xét :*** *Cách đầu tiên cho ta lời giải "sáng" hơn !*

Ví dụ 3. Tính :

a) $I_1 = \int\frac{1}{e^x+1}dx$;   b) $I_2 = \int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

Giải

a) Ta có: $I_1 = \int\frac{1}{e^x+1}dx = \int\frac{(e^x+1)-e^x}{e^x+1}dx = \int\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$

$$= \int dx - \int\frac{1}{e^x+1}d(e^x+1) = x - \ln(e^x+1) + C.$$

* ***Cách khác:*** *Đặt* $u = e^x + 1$ *(các bạn xem trong bài phương pháp đổi biến số).*

b) Ta có : $I_2 = \int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{1}{(e^x-1)(e^x+1)}de^x$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^x+1}\right)de^x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^x-1}d(e^x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^x+1}d(e^x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|e^x-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|e^x+1\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C.$$

*** Cách khác :**

Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$.

Suy ra $I_2 = \int \frac{1}{u^2-1}du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}d(u-1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1}d(u+1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|u-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|u+1\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

Thay $u = e^x$ ta được : $I_2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C.$

**** Nhận xét :** Cách đầu tiên cho ta lời giải gọn hơn !*

Ví dụ 4. Tính :

a) $I_1 = \int \tan x dx$;   b) $I_2 = \int \tan^4 x dx$

c) $I_3 = \int \frac{1}{\sin x}dx$;   d) $I_4 = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d(\cos x)$

$$= -\ln\left|\cos x\right| + C.$$

b) Ta có : $I_2 = \int \tan^2 x.\tan^2 x dx = \int \tan^2 x\left(\tan^2 x + 1 - 1\right)dx$

$$= \int\left[\tan^2 x\left(\tan^2 x + 1\right) - \tan^2 x\right]dx$$

$$= \int\left[\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x\right]dx$$

$$= \int \tan^2 x d(\tan x) - \int\left[(\tan^2 x + 1) - 1\right]dx$$

$$= \int \tan^2 x d(\tan x) - \int (\tan^2 x + 1)dx + \int dx$$

$$= \int \tan^2 x d(\tan x) - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int dx$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.$$

c) Ta có : $I_3 = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

$$= -\int \frac{1}{1-\cos^2 x}d(\cos x) = \int \frac{1}{\cos^2 x - 1}d(\cos x)$$

$$= \int \frac{1}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}d(\cos x)$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1}\right)d(\cos x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\cos x - 1}d(\cos x - 1) - \int \frac{1}{\cos x + 1}d(\cos x + 1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\cos x - 1\right| - \ln\left|\cos x + 1\right|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

*** Cách khác :**

$$I_3 = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}dx = \int \frac{1}{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}d\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

*** Chú ý :** *hai cách đều cho ta kết quả đúng !*

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right| = \frac{1}{2}\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

d) Ta có : $I_4 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}$

$$= \int \frac{\left[(1-\sin^2 x) + \sin^2 x\right]}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}d(\sin x) = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{1-\sin^2 x}\right)d(\sin x)$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}d(\sin x) - \int \frac{1}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)}d(\sin x)$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}d(\sin x) - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1}\right)d(\sin x)$$

$$= \frac{-1}{\sin x} - \frac{1}{2}\left(\ln\left|\sin x - 1\right| - \ln\left|\sin x + 1\right|\right) + C$$

$$= \frac{-1}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C.$$

Ví dụ 5. Tính :

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}dx$; b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x}{x + \sqrt{x^2-1}}dx$

Giải

a) Ta có : $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}dx$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)}dx = \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1) - \int (x-1)^{\frac{1}{2}}d(x-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{3}{2}}\right] + C$$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

b) Ta có : $I_2 = \displaystyle\int \frac{x}{x + \sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{x\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}dx$

$$= \int x\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)dx = \int\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)dx$$

$$= \int x^2dx - \int x\sqrt{x^2-1}dx = \int x^2dx - \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2-1\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}.\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\dfrac{1}{2}+1} = \frac{x^3}{3} - \frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

*** Nhận xét :** *Các ví dụ trên giải được bằng cách áp dụng phép nhân liên hợp: (a – b) là biểu thức liên hợp của (a + b) và ngược lại, ta có (a – b)(a + b) = $a^2 - b^2$.*

Ví dụ 6. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$; b) $I_2 = \int \tan x.\sin^2 x dx$

c) $I_3 = \int \frac{1}{\cos^4 x}dx$; d) $I_4 = \int \cos^5 x dx$

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx = \int \frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$

$$= \int \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{(1-\sin^2 x)}dx = \int \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}+\tan^2 x\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$

$$= 2\int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{2}{\cos^2 x}d(\cos x) - \int dx$$

$$= 2\tan x + \frac{2}{\cos x} - x + C.$$

***Nhận xét** : ta sử dụng phép nhân liên hợp để đưa mẫu thức về dạng gọn hơn, nhằm tách nguyên hàm đã cho thành các nguyên hàm dễ tính hơn.*

b) Ta có : $I_2 = \int \tan x.\sin^2 x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}.(1-\cos^2 x)dx$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - 1)}{\cos x}d(\cos x) = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)d(\cos x)$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - \ln\left|\cos x\right| + C.$$

***Nhận xét** : ta phân tích và sử dụng quan hệ giữa* $\cos x$ *và* $\sin x$ *để định hướng cách giải cho bài này.*

c) Ta có : $I_3 = \int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (\tan^2 x + 1)d(\tan x)$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C.$$

***Nhận xét** : ta phân tích và sử dụng quan hệ giữa* $\frac{1}{\cos^2 x}$ *và* $\tan x$ *để định hướng cách giải cho bài này.*

d) Ta có : $I_4 = \int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x)d(\sin x)$$

$$= \sin x - 2.\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

***Nhận xét** : ta phân tích và sử dụng quan hệ giữa* $\cos x$ *và* $\sin x$ *để định hướng cách giải cho bài này.*

Ví dụ 7. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$; b) $I_2 = \int (\tan^2 x + \tan^4 x)dx$

c) $I_3 = \int \frac{1}{\cos x}dx$; d) $I_4 = \int \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx$

$$= \int \cot^2 x.\frac{1}{\sin^4 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$= -\int \cot^2 x.(1+\cot^2 x)^2 d(\cot x)$$

$$= -\int \cot^2 x(1+2\cot^2 x+\cot^4 x)d(\cot x)$$

$$= -\int (\cot^2 x + 2\cot^4 x + \cot^6 x)d(\cot x)$$

$$= -\left(\frac{\cot^3 x}{3} + \frac{2\cot^5 x}{5} + \frac{\cot^7 x}{7}\right) + C$$

b) Ta có : $I_2 = \int (\tan^2 x + \tan^4 x)dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)dx$

$$= \int \tan^2 x\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \tan^2 x d(\tan x) = \frac{\tan^3 x}{3} + C.$$

c) Ta có : $I_3 = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\sin x)$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\sin x) = -\int \frac{1}{\sin^2 x - 1} d(\sin x)$$

$$= -\int \frac{1}{(\sin x-1)(\sin x+1)} d(\sin x)$$

$$= -\frac{1}{2} \int\left(\frac{1}{\sin x -1} - \frac{1}{\sin x+1}\right) d(\sin x)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\sin x-1}d(\sin x-1) - \int\frac{1}{\sin x+1}d(\sin x+1)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln|\sin x-1| - \ln|\sin x+1|\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + C.$$

d) Ta có: $I_4 = \int\frac{1-\sin x}{\cos x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$

$$= \int\frac{1}{\cos x}dx - \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos x}dx + \int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + \ln|\cos x| + C.$$ *(áp dụng câu c)*

*** Chú ý :** *Khi tính nguyên hàm và tích phân lượng giác, chúng ta thường sử dụng các công thức sau :*

$$\cot^2 x+1 = \frac{1}{\sin^2 x}\ ;\ \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

** Cách khác áp dụng cho câu c) và câu d): sử dụng đồng nhất thức* $(1-\sin x)+\sin x = 1.$

Ta có : $I_3 = \int\frac{1}{\cos x}dx = \int\frac{(1-\sin x)+\sin x}{\cos x}dx$

$$= \int\frac{1-\sin x}{\cos x}dx + \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= \int\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}dx + \int\frac{-1}{\cos x}d(\cos x)$$

$$= \int\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}dx - \int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)$$

$$= \int\frac{\cos x}{1+\sin x}dx - \int \frac{1}{\cos x}d(\cos x)$$

$$= \int\frac{1}{1+\sin x}d(1+\sin x) - \int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)$$

$$= \ln|1+\sin x| - \ln|\cos x| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C.$$

Kết quả hai cách đều đúng :

$$\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\right|+C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2}{\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}\right| + C$$

$$= \ln\left|\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{-1}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + C.$$

Ví dụ 8. Tính : $I = \int\frac{4x^2-x+7}{x^3+3x+4}dx$

Giải

Ta để ý $x^3+3x+4 = (x+1)(x^2-x+4);\ (x^3+3x+4)' = 3x^2+3$ *và* $4x^2-x+7 = (3x^2+3)+(x^2-x+4)$ *nên ta có lời giải cho bài toán là :*

$$I = \int\frac{4x^2-x+7}{x^3+3x+4}dx = \int\frac{(3x^2+3)+(x^2-x+4)}{x^3+3x+4}dx$$

$$= \int \left(\frac{3x^2+3}{x^3+3x+4} + \frac{x^2-x+4}{x^3+3x+4} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3+3x+4} d(x^3+3x+4) + \int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x^2-x+4)} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3+3x+4} d(x^3+3x+4) + \int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x^2-x+4)} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3+3x+4} d(x^3+3x+4) + \int \frac{1}{x+1} d(x+1)$$

$$= \ln\left|x^3+3x+4\right| + \ln\left|x+1\right| + C = \ln\left|(x+1)(x^3+3x+4)\right| + C.$$

**** Nhận xét:*** *Giải bài toán này chúng ta dùng thủ thuật biến đổi để tử thức chứa đạo hàm bậc nhất của mẫu thức. Đây là cách biến đổi thường vận dụng giải những nguyên hàm, tích phân dạng phân thức.*

2. Sử dụng đồng nhất thức, phương pháp hệ số bất định…

Ví dụ 9. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} dx$

Giải

a) Sử dụng đồng nhất thức : $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Ta có : $I_1 = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C.$$

b) Sử dụng đồng nhất thức : $1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)}$.

Ta có : $I_2 = \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} dx$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)} . \int \frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} . \int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int \left[\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} \right] dx$$

$$= \sqrt{2} \int \left[\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \right] dx$$

$$= \sqrt{2} \left[\int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} dx - \int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} dx \right]$$

$$= \sqrt{2} \left[\int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} d\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right) - \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} d\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right| - \ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right| \right) + C = \sqrt{2} \ln\left| \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \right| + C.$$

Ví dụ 10. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{3x+2}{(x^2+x)(x^3+x^2+1)} dx$; b) $I_2 = \int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2} dx$

Giải

a) Ta có :

$$I_1=\int\frac{3x+2}{(x^2+x)(x^3+x^2+1)}dx=\int\frac{x(3x+2)}{x(x^2+x)(x^3+x^2+1)}dx$$

$$=\int\frac{(3x^2+2x)}{(x^3+x^2)(x^3+x^2+1)}dx$$

Sử dụng đồng nhất thức : $1=(x^3+x^2+1)-(x^3+x^2)$.

Ta có : $I_1=\int\frac{\left[(x^3+x^2+1)-(x^3+x^2)\right](3x^2+2x)}{(x^3+x^2)(x^3+x^2+1)}dx$

$$=\int\left[\frac{(x^3+x^2+1)(3x^2+2x)}{(x^3+x^2)(x^3+x^2+1)}-\frac{(x^3+x^2)(3x^2+2x)}{(x^3+x^2)(x^3+x^2+1)}\right]dx$$

$$=\int\left[\frac{(3x^2+2x)}{(x^3+x^2)}-\frac{(3x^2+2x)}{(x^3+x^2+1)}\right]dx$$

$$=\int\frac{(3x^2+2x)}{(x^3+x^2)}dx-\int\frac{(3x^2+2x)}{(x^3+x^2+1)}dx$$

$$=\int\frac{1}{(x^3+x^2)}d(x^3+x^2)-\int\frac{1}{(x^3+x^2+1)}d(x^3+x^2+1)$$

$$=\ln\left|x^3+x^2\right|-\ln\left|x^3+x^2+1\right|+C=\ln\left|\frac{x^3+x^2}{x^3+x^2+1}\right|+C.$$

*** Cách khác :**

$$I_1=\int\frac{3x+2}{(x^2+x)(x^3+x^2+1)}dx=\int\frac{x(3x+2)}{x(x^2+x)(x^3+x^2+1)}dx$$

$$=\int\frac{(3x^2+2x)}{(x^3+x^2)(x^3+x^2+1)}dx.$$

Đặt $u=x^3+x^2\Rightarrow du=(3x^2+2x)dx$

$$I_1=\int\frac{1}{u(u+1)}du=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\ln|u|-\ln|u+1|+C$$

$$=\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|+C.$$

Thay $u=x^3+x^2$ ta được : $I_1=\ln\left|\frac{x^3+x^2}{x^3+x^2+1}\right|+C$.

b) Sử dụng đồng nhất thức : $4x=(x+1)^2-(x-1)^2$.

Ta có : $I_2=\int\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}-\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+C.$$

Ví dụ 11. Tính : $I=\int\frac{2x+4}{x^2+3x+2}dx$

Giải

Ta sẽ sử dụng đồng nhất thức sao cho tử có biểu thức là đạo hàm bậc nhất của mẫu ! Do $(x^2+3x+2)'=2x+3$ *nên ta chọn đồng nhất thức là* $2x+4=(2x+3)+1$.

Ta có : $I=\int\frac{2x+4}{x^2+3x+2}dx=\int\frac{(2x+3)+1}{x^2+3x+2}dx$

$$=\int\frac{(2x+3)}{x^2+3x+2}dx+\int\frac{1}{x^2+3x+2}dx$$

$$=\int\frac{1}{x^2+3x+2}d(x^2+3x+2)+\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$$

$$=\int\frac{1}{x^2+3x+2}d(x^2+3x+2)+\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x^2+3x+2}d(x^2+3x+2)+\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\ln\left|x^2+3x+2\right|+\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$$

$$=\ln\left|x^2+3x+2\right|+\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C.$$

Ví dụ 12. Tính : $I = \int \frac{1}{2\sin x + 1}\,dx$

Giải

Ta có : $I = \int\frac{1}{2\sin x+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\frac{1}{2}}dx$

Các bạn lưu ý đồng nhất thức : $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ thì

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\sin\frac{\pi}{6}}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}dx\,.$$

Tiếp tục sử dụng đồng nhất thức :

$$1 = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\left[\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)-\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)\right]}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)-\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)\right]$$

Suy ra : $I = \frac{1}{4}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)-\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)\right]}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}dx$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{\cos\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\left[\frac{\cos\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\left[\frac{\cos\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\int\frac{1}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)}d\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)-\int\frac{1}{\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}d\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ln\left|\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\right|-\ln\left|\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)\right|\right]+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}\right|+C\,.$$

Ví dụ 13. Tính : $I = \int\frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx$

Giải

Do mẫu thức chứa hai nhị thức bậc nhất (x + 2) và (x + 3) nên ta sử dụng đồng nhất thức: (x + 3) – (x + 2) = 1.

Ta có : $I = \int\frac{1}{(x+2)(x+3)}dx = \int\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}dx$

$$= \int\left[\frac{(x+3)}{(x+2)(x+3)}-\frac{(x+2)}{(x+2)(x+3)}\right]dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \ln|x+2|-\ln|x+3|+C$$

$$= \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C\,.$$

*** Cách khác :** Ta chọn hai số A, B sao cho ta có đồng nhất thức

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

Vậy $1 = A(x+3)+B(x+2) \Leftrightarrow (A+B)x+3A+2B-1 = 0$

Chọn A, B sao cho $\begin{cases}A+B=0\\3A+2B-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=-B\\3A-2A-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$

Ta có : $I = \int \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx = \int\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)dx$

$$= \ln|x+2| - \ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C.$$

Ví dụ 14. Tính : $I = \int \frac{7x-4}{(x+2)(x-1)^2}dx$

Giải

Chọn ba số A, B, C sao cho :

$$\frac{7x-4}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Vậy $7x - 4 = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2$

Lần lượt thay $x = 0, x = 2, x = 3$ ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} -4 = 2A - 2B + C \\ 10 = 4A + 4B + C \\ 17 = 5A + 10B + 4C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -2 \end{cases}$$

Suy ra :

$$I = \int \frac{7x-4}{(x+2)(x-1)^2}dx = \int\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x+2}\right]dx$$

$$= \frac{-1}{(x-1)} + 2\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C = \frac{-1}{(x-1)} + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

** Cách khác : (Tìm A, B, C như ví dụ 11)*

Ví dụ 15. Tính :

a) $I_1 = \int e^x \cos x dx$;   b) $I_2 = \int (x^3 + 5x^2 + 5x + 4)e^x dx$.

Giải

Ta xét $I_1 = \int e^x \cos x dx = (a\sin x + b\cos x)e^x + C$. Lấy đạo hàm hai vế ta được : $e^x \cos x = (a\cos x - b\sin x)e^x + (a\sin x + b\cos x)e^x$

$$\Leftrightarrow e^x \cos x = \left[(a+b).\cos x + (a-b).\sin x\right]e^x$$

Để được đẳng thức, ta cần chọn a, b sao cho : với mọi số thực x thì

$$e^x \cos x = \left[(a+b).\cos x + (a-b).\sin x\right]e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $I_1 = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$.

**** Chú ý :***

– Công thức $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

– Bài này chúng ta giải được bằng phương pháp nguyên hàm từng phần! (sẽ học ở bài sau)

b) Ta xét $I_2 = \int (x^3 + 5x^2 + 5x + 4)e^x dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x + C$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được :

$$(x^3 + 5x^2 + 5x + 4)e^x = (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 5x^2 + 5x + 4)e^x = \left[ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+2b)x + c + d\right]e^x$$

Để được đẳng thức, ta cần chọn a, b, c, d sao cho :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 5 \\ 2b + c = 5 \\ c + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy $I_2 = \int (x^3 + 5x^2 + 5x + 4)e^x dx = (x^3 + 2x^2 + x + 3)e^x + C$.

**** Chú ý :***

– Công thức $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

– Bài này chúng ta giải được bằng phương pháp nguyên hàm từng phần, nhưng sẽ cho lời giải dài !

3. Sử dụng nguyên hàm phụ

Ví dụ 16. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$;   b) $I_2 = \int \sin 2x.\sin^2 x dx$.

Giải

a) Xét nguyên hàm phụ : $J_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$, ta có :

$$I_1 + J_1 = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx + \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int dx = x + C. \qquad (1)$$

$$I_1 - J_1 = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{1}{\cos x + \sin x}d(\cos x + \sin x)$$

$$= \ln\left|\cos x + \sin x\right| + C. \qquad (2)$$

Cộng vế với vế (1) và (2), ta được:

$$2I_1 = x + \ln\left|\cos x + \sin x\right| + C$$

hay $$I_1 = \frac{1}{2}\left(x + \ln\left|\cos x + \sin x\right|\right) + C.$$

* ***Chú ý :*** *"C" là hằng số bất kỳ nên ta không cần quan tâm tính về nó!*

b) Do đồng nhất thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên ta chọn nguyên hàm phụ là $J_2 = \int \sin 2x.\cos^2 x dx$. Ta có :

$$I_2 + J_2 = \int \sin 2x.\sin^2 x dx + \int \sin 2x.\cos^2 x dx$$

$$= \int \sin 2x(\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \int \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C. (1)$$

$$I_2 - J_2 = \int \sin 2x.\sin^2 x dx - \int \sin 2x.\cos^2 x dx$$

$$= \int \sin 2x(\sin^2 x - \cos^2 x)dx = -\int \sin 2x.\cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin 4x dx = \frac{1}{8}\cos 4x + C. (2)$$

Cộng vế với vế (1) và (2), ta được :

$$2I_2 = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

hay $$I_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\cos 4x - \cos 2x\right) + C.$$

* ***Chú ý :*** *bài này chúng ta có thể làm cách khác với chú ý quan hệ giữa sinx và cosx !*

Ví dụ 17. Tính : $I = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx$

Giải

Xét nguyên hàm phụ là $J = \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$, ta có :

$$I + J = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx + \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$$

$$= \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int dx = x + C. (1)$$

$$I - J = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx - \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$$

$$= \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}d(e^x + e^{-x})$$

$$= \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + C. (2)$$

Cộng vế với vế (1) và (2), ta được :

$$2I = x + \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + C \text{ hay } I = \frac{1}{2}\left[x + \ln\left(e^x + e^{-x}\right)\right] + C.$$

* ***Cách khác :*** *Ta giải nhanh hơn theo cách sau*

$$I = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{e^x + \frac{1}{e^x}}dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x} + 1}d(e^{2x} + 1) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) + C.$$

Hai cách đều cho đáp số đúng vì :

$$\frac{1}{2}\left[x+\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[x+\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\ln\left(e^{2x}+1\right)-\ln e^{x}\right]=\frac{1}{2}\left[x+\ln\left(e^{2x}+1\right)-x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right).$$

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1=\int\frac{x(x^2-1)}{3-3x}dx$; b) $I_2=\int\frac{x^2-3x+2}{x-2}dx$

c) $I_3=\int\frac{1}{(1-x)(x+2)}dx$; d) $I_4=\int\frac{1}{x^2-4x+3}dx$

e) $I_5=\int\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx$; g) $I_6=\int\frac{\tan x}{\sin 2x}dx$

h) $I_7=\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx$; i) $I_8=\int\tan 2x(\tan x-\cot x)dx$

k) $I_9=\int\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}dx$; l) $I_{10}=\int\sin 2x\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)dx$

2. Tính :

a) $I_1=\int\frac{2x-3}{x^2-4x+3}dx$; b) $I_2=\int\frac{x}{(x-2)^2(x+2)^2}dx$

c) $I_3=\int\frac{1}{1+\mathrm{six}2x}dx$; d) $I_4=\int\frac{2x}{(x-2)(x+1)^2}dx$.

3. Tính :

a) $I_1=\int\frac{1}{\sin^4 x}dx$; b) $I_2=\int\cos^3 x\,dx$

c) $I_3=\int\frac{1}{\sin 2x}dx$; d) $I_4=\int\cot x\,dx$.

4. Tính :

a) $I_1=\int\frac{1}{e^{-x}+1}dx$; b) $I_2=\int\frac{x}{(x+1)^5}dx$

c) $I_3=\int\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}dx$; d) $I_4=\int\frac{x^3}{x+1}dx$.

5. Tính :

a) $I_1=\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$; b) $I_2=\int(x^3+2x^2-3x+1)e^{x}dx$.

Bài 5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Giả sử ta cần tính nguyên hàm $I=\int f(x)dx$. Ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1 : Biến đổi nguyên hàm ban đầu về dạng

$I=\int f(x)dx=\int f_1(x)f_2(x)dx$. (dạng tích của hai hàm)

Bước 2 : Đặt $\begin{cases}u=f_1(x)\\ dv=f_2(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f_1'(x)dx\\ v=\int f_2(x)dx\end{cases}$ *(tìm v ta không lấy hằng số "C")*

Bước 3 : Khi đó $\boxed{I=uv-\int vdu}$.

Chú ý :

– Ta chọn u và dv sao cho việc tính du *(tính* $f_1'(x)dx$*) và tìm* v *(tính* $v=\int f_2(x)dx$*) phải dễ ! Đồng thời nguyên hàm* $\int vdu$ *cũng phải được tính đơn giản hơn nguyên hàm* $I=\int f(x)dx$ *! Nói chung, nguyên hàm giải được bằng cách này thì biểu thức dưới dấu nguyên hàm có dạng tích của hai biểu thức. Một biểu thức là đạo hàm bậc nhất của hàm số nào đó (mà ta chọn là v(x) trong công thức nguyên hàm từng phần).*

– Cơ sở của phương pháp này là định lí sau : *Nếu hai hàm số* $u=u(x)$ *và* $v=v(x)$ *có đạo hàm liên tục trên K (K là khoảng, đoạn, nửa khoảng của* $\mathbb{R}$*)*

thì $\boxed{\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx}$

1. Các dạng toán cơ bản

Dạng 1 : $\int P(x)e^x dx,\ \int P(x)\sin x dx,\ \int P(x)\cos x dx$ *($P(x)$ là đa thức)*

Cách giải : Đặt $u = P(x)$.

Ví dụ 1. Tính :

a) $I_1 = \int x\sin x dx$;　　b) $I_2 = \int x\sin(2x+1)dx$.

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int x\sin x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$.

Ta được: $I_1 = \int x\sin x dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx$

$$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

b) Ta có : $I_2 = \int x\sin(2x+1)dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \sin(2x+1)dx$

$$\Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2x+1).$$

Ta được : $I_2 = x\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right] - \int\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right]dx$

$$= -\frac{x}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\int\cos(2x+1)dx$$

$$= -\frac{x}{2}.\cos(2x+1) + \frac{1}{4}\sin(2x+1) + C.$$

**** Chú ý :** Ta có thể giải nhanh hơn như sau :*

a) Ta có : $I_1 = \int x\sin x dx = \int x d(-\cos x)$ *(đưa* $\sin x$ *vào trong vi phân thành* $(-\cos x)$*)* $= x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx$ *(ta hiểu trong suy nghĩ u là* x *còn v là* $(-\cos x)$ *rồi áp dụng công thức* $I = uv - \int vdu$*)*

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

b) Ta có : $I_2 = \int x\sin(2x+1)dx = \int x d\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right]$

$$= x\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right] - \int\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right]dx$$

$$= -\frac{x}{2}.\cos(2x+1) + \frac{1}{4}\sin(2x+1) + C.$$

**** Nhận xét :***

– Đến dạng toán này chúng ta lại thấy được tầm quan trọng của công thức nguyên hàm mở rộng khi ta đưa $\sin(2x+1)$ *vào trong vi phân (tức là ta tính nguyên hàm* $\int\sin(2x+1)dx$ *để biết biểu thức trong vi phân là* $\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right]$*).*

– Cách sau cho ta lời giải nhanh và gọn hơn cách đầu. Thế nhưng, để áp dụng được cách sau chúng ta cần thành thạo các kỹ năng ở cách trước đã !

Ví dụ 2. Tính :

a) $I_1 = \int x\cos x dx$;　　b) $I_2 = \int(1-x)\cos x dx$.

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int x\cos x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$.

Ta được : $I_1 = \int x\cos x dx = x\sin x - \int\sin x dx$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

b) Ta có : $I_2 = \int(1-x)\cos x dx$

Đặt $u = 1-x \Rightarrow du = -dx$; $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$.

Ta được : $I_2 = (1-x)\sin x - \int\sin x(-dx)$

$$= (1-x)\sin x + \int\sin x dx$$

$$= (1-x)\sin x - \cos x + C.$$

**** Chú ý :** Ta có thể giải nhanh hơn như sau :*

a) Ta có : $I_1 = \int x\cos x dx = \int x d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx$

$= x\sin x + \cos x + C$

b) Ta có: $I_2 = \int (1-x)\cos x dx = \int (1-x)d(\sin x)$

$= (1-x)\sin x - \int \sin x(-dx) = (1-x)\sin x - \cos x + C.$

Ví dụ 3. Tính :

a) $I_1 = \int xe^x dx$;   b) $I_2 = \int (x^2+2x-1)e^x dx$.

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int xe^x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

Ta được : $I_1 = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

b) Ta có : $I_2 = \int (x^2+2x-1)e^x dx$

Đặt $u = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow du = (2x+2)dx$;

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Ta được :

$$I_2 = \int (x^2+2x-1)e^x dx = (x^2+2x-1)e^x - \int (2x+2)e^x dx$$

Xét nguyên hàm $J = \int (2x+2)e^x dx$

Đặt $u = 2x + 2 \Rightarrow du = 2dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$J = \int (2x+2)e^x dx = (2x+2)e^x - \int e^x 2dx$$

$$= (2x+2)e^x - 2e^x + C$$

Suy ra : $I_2 = (x^2+2x-1)e^x - \left[(2x+2)e^x - 2e^x\right] + C$

$= (x^2+2x-1)e^x - (2x+2)e^x + 2e^x + C$

$= (x^2+2x-1-2x-2+2)e^x + C = (x^2-1)e^x + C.$

Chú ý : *Ta có thể giải nhanh hơn như sau :*

a) Ta có: $I_1 = \int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

b) Ta có: $I_2 = \int (x^2+2x-1)d(e^x) = (x^2+2x-1)e^x - \int (2x+2)e^x dx$

c) $I_2 = \int (x^2+2x-1)e^x dx = (x^2+2x-1)e^x - \int (2x+2)e^x dx$

$= (x^2+2x-1)e^x - \int (2x+2)de^x$

$= (x^2+2x-1)e^x - \left[(2x+2)e^x - 2\int e^x dx\right]$

$= (x^2+2x-1)e^x - (2x+2)e^x + 2e^x + C$

$= (x^2-1)e^x + C.$

**** Nhận xét :***

– Câu b) ta phải tính nguyên hàm từng phần hai lần mới ra kết quả! Nói chung, nếu đa thức P(x) có bậc n thì ta phải tính nguyên hàm từng phần n lần (dạng $\int P(x)e^x dx$).

Dạng 2 : $\int e^{ax+b}\sin(cx+d)dx,\ \int e^{ax+b}\cos(cx+d)dx$

Cách giải : Dùng nguyên hàm từng phần hai lần với $u = e^{ax+b}$.

Ví dụ 4. Tính :

a) $I_1 = \int e^x \cos x dx$;   b) $I_2 = \int e^{2x+1}\sin x dx$.

Giải

a) Ta có: $I_1 = \int e^x \cos x dx$

Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$; $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$.

Ta được : $I_1 = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$

Xét nguyên hàm $J_1 = \int e^x \sin x dx$

Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$; $dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$

$$J_1 = \int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)e^x dx$$

$$= -\cos x e^x + \int \cos x e^x dx$$

Vậy $I_1 = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(-\cos x e^x + \int \cos x e^x dx\right)$

hay $I_1 = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + \cos x e^x - I_1$

Suy ra : $2I_1 = \left(e^x \sin x + \cos x e^x\right) + C$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\sin x + \cos x\right)e^x + C.$$

b) Ta có : $I_2 = \int e^{2x+1} \sin x dx$

Đặt $u = e^{2x+1} \Rightarrow du = 2e^{2x+1}dx$; $dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$

Ta được : $I_2 = \int e^{2x+1} \sin x dx = e^{2x+1}(-\cos x) - \int (-\cos x).2.e^{2x+1}dx$

$$= -\cos x.e^{2x+1} + 2\int \cos x e^{2x+1}dx$$

Xét nguyên hàm $J_2 = \int \cos x e^{2x+1}dx$

Đặt $u = e^{2x+1} \Rightarrow du = 2e^{2x+1}dx$; $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

$$J_2 = \int \cos x e^{2x+1}dx = e^{2x+1}.\sin x - \int \sin x.e^{2x+1}.2dx$$

$$= e^{2x+1}.\sin x - 2\int e^{2x+1}.\sin x dx$$

Hay $J_2 = e^{2x+1}.\sin x - 2I_2$

Ta được : $I_2 = -\cos x.e^{2x+1} + 2(e^{2x+1}.\sin x - 2I_2)$

Suy ra $5I_2 = -\cos x.e^{2x+1} + 2e^{2x+1}.\sin x + C$

$$I_2 = \frac{1}{5}\left(-\cos x + 2\sin x\right)e^{2x+1} + C.$$

**** Chú ý :** Ta có thể giải nhanh hơn như sau :*

a) Ta có :

$$I_1 = \int e^x \cos x dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + \left(e^x \cos x - \int e^x \cos x dx\right)$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - I_1.$$

Suy ra $I_1 = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$.

b) Ta có : $I_2 = \int e^{2x+1} \sin x dx = \int e^{2x+1} d(-\cos x)$

$$= e^{2x+1}(-\cos x) - \int (-\cos x).2.e^{2x+1}dx$$

$$= -\cos x.e^{2x+1} + 2\int \cos x e^{2x+1}dx$$

$$= -\cos x.e^{2x+1} + 2\int e^{2x+1}d(\sin x)$$

$$= -\cos x.e^{2x+1} + 2\left[e^{2x+1}.\sin x - 2\int e^{2x+1}.\sin x dx\right]$$

$$= -\cos x.e^{2x+1} + 2\left[e^{2x+1}.\sin x - 2I_2\right]$$

Suy ra $5I_2 = -\cos x.e^{2x+1} + 2e^{2x+1}.\sin x + C$

hay $I_2 = \frac{1}{5}\left(-\cos x + 2\sin x\right)e^{2x+1} + C$.

Dạng 3 : $\int P(x)\ln(ax+b)dx$ *($P(x)$ là đa thức)*

Cách giải : Đặt $u = \ln(ax+b)$.

Ví dụ 5. Tính :

a) $I_1 = \int \ln x dx$; b) $I_2 = \int x\ln(x+1)dx$.

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int \ln x dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$.

Ta được : $I_1 = \int \ln x dx = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x.\ln x - \int dx$

$$= x.\ln x - x + C.$$

b) Ta có : $I_2 = \int x\ln(x+1)dx$

Đặt $u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{1}{x+1}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Ta được : $I_2 = \int x\ln(x+1)dx = \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x+1}dx$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx$$

Xét nguyên hàm

$$J_2 = \int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}dx$$

$$= \int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$$

Ta được : $I_2 = \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right) + C$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

$$= -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + (x^2-1).\frac{1}{2}\ln(x+1) + C.$$

*** Chú ý :** *Ta có thể giải nhanh hơn như sau:*

a) Ta có: $I_1 = \int \ln x dx = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x.\ln x - \int dx$

$$= x.\ln x - x + C.$$

b) Ta có: $I_2 = \int x\ln(x+1)dx = \int \ln(x+1)d\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right) + C$$

$$= -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + (x^2-1).\frac{1}{2}\ln(x+1) + C.$$

2. Một số dạng toán khác

Về sau, nếu gặp dạng nguyên hàm tương tự ba dạng cơ bản trên, ta có thể áp dụng cách như đã trình bày. Trong mục này, chúng ta sẽ xét những dạng toán như vậy và những dạng toán giải được bằng cách áp dụng phương pháp nguyên hàm từng phần kết hợp với các phương pháp khác (như phương pháp đổi biến số, phương pháp biến đổi…).

Ví dụ 6. Tính :

a) $I_1 = \int x\ln(x^2+1)dx$; b) $I_2 = \int \frac{1+\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int x\ln(x^2+1)dx$

Đặt $u = \ln(x^2+1) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+1}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$.

Ta được : $I_1 = \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \int \frac{x^2}{2}.\frac{2x}{x^2+1}dx$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}xdx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}xdx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)d(x^2+1)$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\left[\int d(x^2+1) - \int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)\right] + C$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\left[(x^2+1) - \ln(x^2+1)\right] + C$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2.\ln(x^2+1) - (x^2+1) + \ln(x^2+1)\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^2+1).\ln(x^2+1) - (x^2+1)\right] + C$$

Vậy $I_1 = \frac{1}{2}(x^2+1)\left[\ln(x^2+1) - 1\right] + C$.

*** Cách khác :** *Ta dựa vào quan hệ giữa* x *và* x^2 *thì chọn ẩn phụ là* $t = x^2 + 1$. *Lời giải cho bài toán là:* $I_1 = \int x\ln(x^2+1)dx$

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx$ hay $\frac{dt}{2} = xdx$.

Ta có : $I_1 = \frac{1}{2}\int \ln t dt$

Đặt $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt$; $dv = dt \Rightarrow v = t$.

Suy ra $I_1 = \frac{1}{2}\int \ln t dt = \frac{1}{2}\left(t.\ln t - \int t.\frac{1}{t}dt\right) = \frac{1}{2}(t.\ln t - t) + C$.

Thay $t = x^2 + 1$ ta được $I_1 = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1)\right] + C$

hay $I_1 = \frac{1}{2}(x^2+1)\left[\ln(x^2+1) - 1\right] + C$.

**** Nhận xét :***

– Nhờ phép đặt ẩn phụ mà ta có cách giải gọn, đơn giản hơn cách thứ nhất. Cách thứ hai chúng ta đã kết hợp phương pháp nguyên hàm từng phần với phương pháp đổi biến số...

b) $I_2 = \int \frac{1 + \ln x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

Ta có : $J_1 = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{-1}{x+1} + C$

Xét $J_2 = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = \frac{1}{(x+1)^2}dx \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1}$.

Ta được : $J_2 = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx = \frac{-1}{x+1}.\ln x - \int \frac{-1}{x+1}.\frac{1}{x}dx$

$$= \frac{-1}{x+1}.\ln x + \int \frac{1}{x(x+1)}dx = \frac{-1}{x+1}.\ln x + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{-1}{x+1}.\ln x + \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{-1}{x+1}.\ln x + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

Vậy $I_2 = \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{x+1}.\ln x + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$

$$= \frac{-1}{x+1}(1 + \ln x) + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

**** Nhận xét :*** *Để tính I_2 chúng ta đã tách nó thành hai nguyên hàm dễ tính hơn.*

**** Chú ý :*** *Ta có thể giải nhanh hơn như sau :*

a) Ta có : $I_1 = \int \ln(x^2+1)d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \int \frac{x^2}{2}.\frac{2x}{x^2+1}dx$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1) - 1}{x^2+1}d(x^2+1)$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$= \left(\frac{x^2+1}{2}\right)\left[\ln(x^2+1) - 1\right] + C.$$

b) Ta có : $I_2 = \int \frac{1 + \ln x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

$$= \frac{-1}{x+1} + \int \ln x d\left(\frac{-1}{x+1}\right) = \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{x+1}.\ln x - \int \frac{-1}{x+1}.\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{-1}{x+1}(\ln x + 1) + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{-1}{x+1}(1 + \ln x) + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

Ví dụ 7. Tính :

a) $I_1 = \int x^7 e^{x^4} dx$; b) $I_2 = \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$.

Giải :

a) ***Phân tích bài toán:*** *Nếu dùng phương pháp nguyên hàm từng phần theo lối thông thường, ta sẽ chọn* $u = e^{x^4}$ *hoặc* $u = x^7$. *Cả hai cách đặt này đều không khả thi rồi! (các bạn thử kiểm tra?). Ở nguyên hàm này, ta để ý quan hệ giữa* x^3 *và* x^4 *thì ta có thể phân tích được như sau :*

$$I_1 = \int x^7 e^{x^4} dx = \int x^3 x^4 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int x^4 e^{x^4} d\left(x^4\right).$$

Do đó, ta sẽ đặt ẩn phụ $t = x^4$ *rồi mới áp dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.*

Lời giải của bài toán :

Ta có: $I_1 = \int x^7 e^{x^4} dx = \int x^3 x^4 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int x^4 e^{x^4} d\left(x^4\right)$

Đặt $t = x^4$ ta được $I_1 = \frac{1}{4}\int t e^t dt$.

Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$; $dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$.

Ta được: $I_1 = \frac{1}{4}\int t e^t dt = \frac{1}{4}\left(t e^t - \int e^t dt\right) = \frac{1}{4}\left(t e^t - e^t\right) + C$

Thay $t = x^4$ ta có: $I_1 = \frac{1}{4} e^{x^4}\left(x^4 - 1\right) + C$.

*** Cách khác: (sử dụng phương pháp hệ số bất định)**

Phân tích bài toán : *Ta dự đoán nguyên hàm tìm được có dạng* $I_1 = \left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m\right)e^{x^4}$ *vì khi đạo hàm* e^{x^4} *ta sẽ được đa thức bậc ba (có trong* $4x^3 e^{x^4}$*), đa thức này nhân với đa thức bậc bốn ta sẽ có đa thức bậc bảy (là bậc của đa thức có trong biểu thức dưới dấu nguyên hàm).*

Lời giải cho bài toán :

Ta xét $I_1 = \int x^7 e^{x^4} dx = \left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m\right)e^{x^4}$. Lấy đạo hàm hai vế ta được : $x^7 e^{x^4} = \left(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d\right)e^{x^4} + 4x^3\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m\right)e^{x^4}$

hay $x^7 e^{x^4} = \left[4ax^7 + 4bx^6 + 4cx^5 + 4dx^4 + (4a + 4m)x^3 + 3bx^2 + 2cx + d\right]e^{x^4}$.

Đồng nhất hệ số, ta có : $\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b = 0 \\ 4c = 0 \\ 4d = 0 \\ 4a + 4m = 0 \\ 3b = 0 \\ 2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ m = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

Vậy ta có $I_1 = \frac{1}{4} e^{x^4}\left(x^4 - 1\right) + C$.

**** Nhận xét :*** *Do đặc thù của những nguyên hàm giải được bằng phương pháp nguyên hàm từng phần là biểu thức dưới dấu nguyên hàm thường có dạng tích của hai hàm số, nên nhờ tính chất đạo hàm của tích, chúng ta có thể dự đoán được dạng của nguyên hàm cần tìm. Do đó, ta cũng có thể giải một số dạng toán này bằng cách áp dụng phương pháp hệ số bất định.*

b) ***Phân tích bài toán :*** *Gặp bài này, ta phải chọn u như thế nào đây? Chọn* $u = x^2$, $u = e^x$ *thì tìm v không dễ! Nếu đặt* $u = \frac{x^2}{(x+2)^2}$, $u = \frac{e^x}{(x+2)^2}$ *thì tìm được v dễ dàng nhưng tính "du" lại khá phức tạp! Còn chọn* $u = x^2 e^x$ *thì khả năng sẽ dễ dàng hơn cho ta !*

Lời giải của bài toán :

Ta có : $I_2 = \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

Đặt $u = x^2 e^x \Rightarrow du = (2xe^x + x^2 e^x)dx = (2 + x)xe^x dx$;

$$dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1}.$$

Ta được : $I_2 = \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = \frac{-1}{x+2}.x^2 e^x - \int \frac{-1}{x+2}.(2 + x)xe^x dx$

$$= \frac{-1}{x+2}.x^2e^x + \int xe^x dx.$$

Xét $J = \int xe^x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

Ta có : $J = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

Suy ra $I_2 = \frac{-1}{x+2}.x^2e^x + xe^x - e^x + C = \left(\frac{-x^2}{x+2} + x - 1\right)e^x + C$.

***Chú ý :** Ta có thể giải nhanh hơn như sau :*

a) $I_1 = \int x^7 e^{x^4} dx = \int x^3 x^4 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int x^4 d\left(e^{x^4}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left[x^4 e^{x^4} - \int e^{x^4} d\left(x^4\right)\right] = \frac{1}{4}e^{x^4}\left(x^4 - 1\right) + C.$$

b) $I_2 = \int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = \int x^2e^x d(\frac{-1}{x+2})$

$$= \frac{-1}{x+2}.x^2e^x - \int \frac{-1}{x+2}.(2+x)xe^x dx = \frac{-x^2e^x}{x+2} + \int x de^x$$

$$= \frac{-x^2e^x}{x+2} + \left(xe^x - \int e^x dx\right) = \left(\frac{-x^2}{x+2} + x - 1\right)e^x + C.$$

Ví dụ 8. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}dx$;   b) $I_2 = \int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}dx = \int x.\frac{x}{(x^2-1)^2}dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$;

$$dv = \frac{x}{(x^2-1)^2}dx \Rightarrow v = \frac{-1}{2(x^2-1)}dx.$$

Ta được : $I_1 = \frac{-x}{2(x^2-1)^2} - \int \frac{-1}{2(x^2-1)}dx$

$$= \frac{-x}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-1}dx$$

$$= \frac{-x}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$= \frac{-x}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{-x}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{x-1}d(x-1) - \int \frac{1}{x+1}d(x+1)\right)$$

$$= \frac{-x}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{4}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + C$$

$$= \frac{-x}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

***Cách khác :** (dùng phương pháp biến đổi)*

Ta có : $I_1 = \int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{[(x-1)+(x+1)]^2}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(x-1)^2 + 2(x-1)(x+1) + (x+1)^2}{(x^2-1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{x+1} + \ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{-1}{x-1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-2x}{x^2-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C.$$

b) $I_2 = \int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

Đặt $u = \ln\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow du = \frac{2}{(1-x)^2}.\frac{1-x}{1+x}dx$;

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

Ta được :

$$I_2 = \int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{2}{(1-x)^2}.\frac{1-x}{1+x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{x^2}{(1-x)(1+x)}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{(x^2-1)+1}{(1-x)(1+x)}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\left[-1+\frac{1}{(1-x)(1+x)}\right]dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\left[-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\right]dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} + \int dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} + \int dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}d(x-1) - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}d(x+1)$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} + x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

**** Chú ý :*** *Ta có thể giải nhanh hơn như sau:*

a) Ta có : $I_1 = \int\frac{x^2}{(x^2-1)^2}dx = \frac{1}{2}\int x.\frac{1}{(x^2-1)^2}d(x^2-1)$

$$= \frac{1}{2}\int x d\left(\frac{-1}{x^2-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{x^2-1} - \int\frac{-1}{x^2-1}dx\right)$$

$$= \frac{-x}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{-x}{2(x^2-1)^2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

b) $I_2 = \int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \int\ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{x^2}{2}.\frac{2}{(1-x)^2}.\frac{1-x}{1+x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{(x^2-1)+1}{(1-x)(1+x)}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\left[-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\right]dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} + \int dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}d(x-1) - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}d(x+1)$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} + x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x} + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Ví dụ 9. Tính :

a) $I_1 = \int\cos\sqrt{x}dx$;　　　　b) $I_2 = \int\frac{x}{\cos^2 x}dx$.

Giải

a) $I_1 = \int\cos\sqrt{x}dx$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2tdt$

ta được $I_1 = 2\int t\cos tdt$.

Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$; $dv = \cos tdt \Rightarrow v = \sin t$.

Ta được : $I_1 = 2\int t\cos tdt = 2\left(t.\sin t - \int\sin tdt\right)$

$$= 2\left(t.\sin t + \cos t\right) + C.$$

Thay $t = \sqrt{x}$ ta có : $I_1 = 2\left(\sqrt{x}.\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + C$.

b) $I_2 = \int\frac{x}{\cos^2 x}dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \frac{1}{\cos^2 t}dt \Rightarrow v = \tan t$.

Ta được :

$$I_2 = \int\frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x - \int\tan xdx = x\tan x - \int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= x\tan x - \int\frac{-1}{\cos x}d(\cos x) = x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

**** Chú ý :*** *Ta có thể giải nhanh hơn như sau .*

a) $\mathrm{I_1} = \int \cos\sqrt{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = 2\int \sqrt{\mathrm{x}}.\cos\sqrt{\mathrm{x}}\mathrm{d}(\sqrt{\mathrm{x}}) = 2\int \sqrt{\mathrm{x}}\mathrm{d}(\sin\sqrt{\mathrm{x}})$

$$= 2\left[(\sin\sqrt{\mathrm{x}}).\sqrt{\mathrm{x}} - \int \sin\sqrt{\mathrm{x}}\mathrm{d}(\sqrt{\mathrm{x}})\right]$$

$$= 2\left[(\sin\sqrt{\mathrm{x}}).\sqrt{\mathrm{x}} + \cos\sqrt{\mathrm{x}}\right] + \mathrm{C}.$$

b) $\mathrm{I_2} = \int \dfrac{\mathrm{x}}{\cos^2\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int \mathrm{xd}(\tan\mathrm{x}) = \mathrm{x}.\tan\mathrm{x} - \int \tan\mathrm{xdx}$

$$= \mathrm{x}.\tan\mathrm{x} + \int \frac{1}{\cos\mathrm{x}}\mathrm{d}(\cos\mathrm{x}) = \mathrm{x}.\tan\mathrm{x} + \ln\left|\cos\mathrm{x}\right| + \mathrm{C}.$$

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $\mathrm{I_1} = \int (3\mathrm{x}+2)\sin\mathrm{xdx}$; b) $\mathrm{I_2} = \int \mathrm{x}\sin 2\mathrm{xdx}$

c) $\mathrm{I_3} = \int (1-\mathrm{x})\sin\mathrm{xdx}$; d) $\mathrm{I_4} = \int (\frac{-\mathrm{x}}{2})\cos 3\mathrm{xdx}$

e) $\mathrm{I_5} = \int \mathrm{xe}^{1-\mathrm{x}}\mathrm{dx}$; g) $\mathrm{I_6} = \int (\mathrm{x}^2+2\mathrm{x})\mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\mathrm{dx}$

h) $\mathrm{I_7} = \int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\cos 2\mathrm{xdx}$; i) $\mathrm{I_8} = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{x}+1}\sin\mathrm{xdx}$

k) $\mathrm{I_9} = \int \ln(2\mathrm{x}+1)\mathrm{dx}$; l) $\mathrm{I_{10}} = \int (\mathrm{x}+1)\ln(3\mathrm{x})\mathrm{dx}$

2. Tính :

a) $\mathrm{I_1} = \int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\ln(2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1)\mathrm{dx}$; b) $\mathrm{I_2} = \int \dfrac{\ln\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$

c) $\mathrm{I_3} = \int \mathrm{x}^5\mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}\mathrm{dx}$; d) $\mathrm{I_4} = \int \dfrac{\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}}{(\mathrm{x}+1)^2}\mathrm{dx}$.

3. Tính :

a) $\mathrm{I_1} = \int \dfrac{\mathrm{x}}{\sin^2\mathrm{x}}\mathrm{dx}$; b) $\mathrm{I_2} = \int \sin\mathrm{x}.\ln(\tan\mathrm{x})\mathrm{dx}$

c) $\mathrm{I_3} = \int \mathrm{x}\sin\sqrt{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$; d) $\mathrm{I_4} = \int \sin^2\mathrm{x}.\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG I

Bài 1. NGUYÊN HÀM

1. Tính :

a) $I_1 = \int \dfrac{25x^2+12x+1991}{x}dx = \int\left(25x+12+\dfrac{1991}{x}\right)dx$

$$= \frac{25x^2}{2} + 12x + 1991.\ln\left|x\right| + C\cdot$$

b) $I_2 = \int \dfrac{15x+10\sqrt{x}+1983}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(\dfrac{15x}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{10\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1983}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

$$= \int\left(15x^{1-\frac{1}{3}} + 10x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + 1983x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{15x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{10x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + \frac{1983x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{45x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{60x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{5949x^{\frac{2}{3}}}{2} + C.$$

c) $I_3 = \int \dfrac{(x^2+2)^2}{x^2}dx = \int \dfrac{x^4+4x^2+4}{x^2}dx = \int\left(x^2+4+\dfrac{4}{x^2}\right)dx$

$$= \frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4}{x} + C\cdot$$

d) $I_4 = \int\left(x^5 - 2x + \dfrac{1}{x}\right)dx = \dfrac{x^6}{6} - x^2 + \ln|x| + C\cdot$

2. Tính :

a) $I_1 = \int\left(3\sin x - 4\cos x\right)dx = -3\cos x - 4\sin x + C$;

b) $I_2 = \int\left(\dfrac{3}{\cos^2 x} + \dfrac{4}{\sin^2 x}\right)dx = 3\tan x - 4\cot x + C$

c) $I_3 = \int \dfrac{\tan x}{\sin x\cos x}dx = \int \dfrac{\sin x}{(\sin x\cos x)\cos x}dx$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C\cdot$$

d) $I_4=\int\left(\cot^2 x+\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1+\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$

$=\int\left(-1+\frac{6}{\sin^2 x}\right)dx=-x-6\cot x+C\cdot$

3. Tính :

a) $I_1=\int\frac{e^{2x}+3}{e^x}e^x dx=\int\left(\frac{e^{2x}}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)e^x dx$

$=\int(\mathrm{e}^2\mathrm{x}+3)\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}+3\mathrm{x}+\mathrm{C}$

b) $\mathrm{I}_2=\int\left(e^{x-2}+\frac{4^x}{3^x}\right)dx=e^{x-2}+\left(\frac{4}{3}\right)^x.\frac{1}{\ln\frac{4}{3}}+C.$

c) $I_3=\int 3^x e^x dx=\int(3e)^x dx=\frac{(3e)^x}{\ln 3e}+C\cdot$

d) $I_4=\int\left(\frac{x^4-xe^x}{x}\right)dx=\int\left(x^3-e^x\right)dx=\frac{x^4}{4}-e^x+C\cdot$

4. Tính :

a) $\mathrm{I}_1=\int\left(\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x^2}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{2}{5}}\right)dx$

$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+3x^{\frac{4}{3}}+\frac{25x^{\frac{7}{5}}}{7}+C$

b) $\mathrm{I}_2=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{5}}\right)dx$

$=2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{2}{3}}+\frac{5x^{\frac{3}{5}}}{3}+C$

5. Cho hàm số $f(x)=(x^2+x)e^x$ và $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$. Với giá trị nào của a, b và c thì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$?

Giải

Tập xác định của $F(x)$ và $f(x)$ là $\mathbb{R}$. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x)=f(x)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $F'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x=\left[ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^x$

nên $F'(x)=f(x)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $\left[ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^x=(x^2+x)e^x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\2a+b=1\\b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=1\end{cases}$. Vậy với $a=1$ và $b=-1; c=1$ thì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Bài 2. BẢNG NGUYÊN HÀM MỞ RỘNG

1. Tính :

a) $I_1=\int(4x+2)^6 dx=\frac{1}{4}\frac{(4x+2)^7}{7}+C=\frac{(4x+2)^7}{28}+C$

b) $I_2=\int\frac{5}{(3-2x)^7}dx=\frac{5}{-2}.\frac{1}{6(3-2x)^6}+C=\frac{-5}{12(3-2x)^6}+C$

c) $I_3=\int\frac{1}{\sqrt[3]{(4x+5)^3}}dx=\int\frac{1}{4x+5}dx=\frac{1}{4}\ln|4x+5|+C\cdot$

d) $I_4=\int(4-2x)^5 dx=\frac{1}{-2}.\frac{(4-2x)^6}{6}+C=\frac{-(4-2x)^6}{12}+C$

2. Tính :

a) $I_1=\int\frac{1}{1-x}dx=\frac{1}{-1}\ln|1-x|+C$

b) $I_2=\int 5^{2x-1}dx=\frac{1}{2}.\frac{5^{2x-1}}{\ln 5}+C$

c) $I_2=\int e^{-\frac{4}{3}x+5}dx=-\frac{3}{4}e^{-\frac{4}{3}x+5}+C$

d). $I_4=\int\frac{7}{e^{-x+1}}dx=7\int e^{x-1}dx=7e^{x-1}+C$

3. Tính :

a) $I_1 = \int (\sin(3 - \frac{x}{2}) + \cos 5x)dx = 2\cos(3 - \frac{x}{2}) + \frac{1}{5}\sin 5x + C$.

b) $I_2 = \int \frac{3}{\cos^2(4 - x)}dx = -3\tan(4 - x) + C$

c) $I_3 = \int \left(\frac{1}{\sin^2 3x} + \sin\frac{x}{2}\right)dx = \frac{-1}{3}.\cot 3x - 2\cos\frac{x}{2} + C$

d) $I_4 = \int 2\cos(3 - \frac{x}{4})dx = -8\sin(3 - \frac{x}{4}) + C$.

Bài 3. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1. Tính : *Sử dụng quan hệ giữa* x^n *và* x^{n+1} $(n \neq -1)$

a) Đặt $u = x^4 + 1$ hoặc làm nhanh:

$$I_1 = \int x^3(x^4 + 1)^5 dx = \frac{1}{4}\int (x^4 + 1)^5 d(x^4 + 1) = \frac{(x^4 + 1)^6}{24} + C$$

b) $I_2 = \int \frac{x^7}{(x^4 + 1)^2}dx = \int \frac{x^4.x^3}{(x^4 + 1)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{(x^4 + 1)^2}d(x^4 + 1)$

Đặt $u = x^4 + 1$ ta được $I_2 = \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{x^4 + 1} + C$.

c) $I_3 = \int \frac{x^7}{(x^8 + 1)^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x^8 + 1)^2}d(x^8 + 1) = \frac{1}{8}.\frac{-1}{x^8 + 1} + C$ hoặc đặt $u = x^8 + 1$.

d) $I_4 = \int x^3\sqrt{x^2 + 1}dx = \int x.x^2.\sqrt{x^2 + 1}dx = \frac{1}{2}\int x^2\sqrt{x^2 + 1}d(x^2 + 1)$

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1}$ ta được $I_4 = \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^5}{5} - \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^3}{3} + C$.

2. Tính : *Sử dụng quan hệ giữa* $\frac{1}{x^2}$ *và* $\frac{1}{x}$.

a) $I_1 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = -\int e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C$ hoặc đặt u = $e^{\frac{1}{x}}$ hoặc $u = \frac{1}{x}$.

b) $I_2 = \int \frac{1}{x^2}\cos(\frac{2}{x} - 5)dx = \frac{-1}{2}\int \cos(\frac{2}{x} - 5)d(\frac{2}{x} - 5)$

$= \frac{-1}{2}\sin(\frac{2}{x} - 5) + C$ hoặc đặt $u = \frac{2}{x} - 5$.

c) $I_3 = \int \frac{\sin\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{3x^2}dx = \frac{-1}{3}\int \sin\left(\frac{1}{x} + 1\right)d\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{x} + 1\right) + C$ hoặc đặt $u = \frac{1}{x} + 1$.

d) $I_4 = \int \frac{2}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}dx = -2\int e^{1-\frac{1}{x}}d\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -2e^{1-\frac{1}{x}} + C$ hoặc đặt $u = 1 - \frac{1}{x}$.

3. Tính : *Sử dụng quan hệ giữa* $\frac{1}{x}$ *và* $\ln x$.

a) $I_1 = \int \frac{\sqrt{2\ln x + 3}}{x}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2\ln x + 3}d(2\ln x + 3)$

$= \frac{1}{2}\int (2\ln x + 3)^{\frac{1}{2}}d(2\ln x + 3) = \frac{(2\ln x + 3)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$ hoặc đặt u = 2lnx + 3.

b) $I_2 = \int \frac{2\ln^3 x + \ln x}{x}dx = \int \left(2\ln^3 x + \ln x\right)d(\ln x)$

$= \frac{\ln^4 x}{2} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$ hoặc đặt $u = \ln x$.

c) $I_3 = \int \frac{\ln x\sqrt{\ln x + 1}}{x}dx = \int \ln x\sqrt{\ln x + 1}d(\ln x)$,

đặt $u = \sqrt{\ln x + 1}$ hoặc $u = \ln x$.

d) $I_2 = \int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx = \int \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}d(\ln x)$

$= \int \ln(\ln x)d\left[\ln(\ln x)\right] = \frac{\ln^2(\ln x)}{2} + C$ hoặc

đặt u = lnx hoặc u = ln(lnx)

4. Tính : *Sử dụng quan hệ giữa* e^x *và* $ae^x + b$.

a) $I_1 = \int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)dx$

$= \int\left(e^x - e^{-x}\right)dx = e^x + e^{-x} + C$ hoặc đặt $u = e^x$

b) $I_2 = \int \frac{e^x}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{e^x.e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{e^x}{e^x+1}d(e^x+1)$

$= \int \frac{(e^x+1)-1}{e^x+1}d(e^x+1) = \int\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right)d(e^x+1)$

$= \int d(e^x+1) - \int \frac{1}{e^x+1}d(e^x+1) = (e^x+1) - \ln(e^x+1) + C$

Hoặc đặt $u = e^x + 1$ hoặc $u = e^x$.

5. Tính : *Sử dụng quan hệ giữa sinx và cosx.*

a) $I_1 = \int \cos x \sin^2 x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$ hoặc đặt u = sinx.

b) $I_2 = \int \sin x e^{\cos x+1}dx = -\int e^{\cos x+1}d(\cos x+1) = -e^{\cos x+1} + C$.

Hoặc đặt $u = \cos x + 1$.

c) $I_3 = \int \cos^3 x dx = \int \cos x.\cos^2 x dx = \int \cos x.(1-\sin^2 x)dx$

$= \int (1-\sin^2 x)d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

d) $I_2 = \int \sin^3 x dx = \int \sin x.\sin^2 x dx = \int \sin x.(1-\cos^2 x)dx$

$= -\int (1-\cos^2 x)d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$ hoặc đặt u = cosx.

6. Tính : *Sử dụng quan hệ giữa sin²x, cos²x và sin2x.*

a) $I_1 = \int \frac{\sin 2x}{2\sin^2 x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sin^2 x+1}d(2\sin^2 x+1)$

$= \frac{1}{2}\ln(2\sin^2 x+1) + C$. Hoặc đặt $u = 2\sin^2 x+1$ hoặc $u = \sin x$.

b) $I_2 = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx$. Đặt $u = \sqrt{2+\cos^2 x}$

$\Rightarrow u^2 = 2 + \cos^2 x \Rightarrow 2udu = -\sin 2x dx$, ta được:

$I_2 = \int \frac{-2udu}{u} = -2u + C$.

Thay $u = \sqrt{2+\cos^2 x}$ suy ra $I_2 = -2\sqrt{2+\cos^2 x} + C$.

7. Tính : *Sử dụng quan hệ giữa* $\frac{1}{\cos^2 x}$ *và* $\tan x$, $\frac{1}{\sin^2 x}$ *và* $\cot x$.

a) $I_1 = \int \frac{1}{\sin x\cos x}dx = \int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^2 x}dx$

$= \int \frac{1}{\tan x}d(\tan x) = \ln|\tan x| + C$.

b) $I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x - \sin x\cos x}dx = \int \frac{1}{(1-\tan x)\cos^2 x}dx$

$= -\int \frac{1}{(1-\tan x)}d(1-\tan x) = -\ln|1-\tan x| + C$

8. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$. Đặt $u = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow u^2 = e^x + 1$

$\Rightarrow 2udu = e^x dx$. Ta được:

$I_1 = \int \frac{2udu}{u(u^2-1)} = 2\int \frac{du}{(u^2-1)} = \int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$

$= \ln|u-1| - \ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$.

b) $I_2 = \int \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$. Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1$

$\Rightarrow 2udu = dx$. Ta được:

$$I_2 = \int \frac{u^2-1}{1+u}2udu = \int \frac{(u-1)(u+1)}{1+u}2udu$$

$$= \int (2u^2 - 2u)du = \frac{2u^3}{3} - u^2 + C\cdot$$

Thay $u = \sqrt{x+1}$ ta được: $I_2 = \frac{2(\sqrt{x+1})^3}{3} - x - 1 + C\cdot$

9. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Đặt $u - x = \sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow u^2 - 2ux + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{u^2-1}{2u} \Rightarrow dx = \frac{u^2+1}{2u^2}du$

và $u - x = \frac{u^2+1}{2u}$. Ta được:

$$I_1 = \int \frac{2u}{u^2+1}.\frac{u^2+1}{2u^2}du = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C\cdot$$

Thay $u = \sqrt{x^2+1} + x$ ta được: $I_1 = \ln|\sqrt{x^2+1} + x| + C.$

b) $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}dx$. Đặt $x + 1 = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5du$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} = u^3$; $\sqrt[3]{x+1} = u^2$. Ta được:

$$I_2 = \int \frac{1}{u^3+u^2}.6u^5du = \int \frac{6(u^3+1)-6}{u+1}du$$

$$= \int \frac{6(u+1)(u^2-u+1)-6}{u+1}du = 6\int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|u+1| + C.$$

Thay $u = \sqrt[6]{x+1}$ ta được :

$$I_2 = 2\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 - 3\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2 + 6\left(\sqrt[6]{x+1}\right) - 6\ln|\sqrt[6]{x+1} + 1| + C$$

10. Tính :

a) $I_1 = \int \sqrt{4-x^2}dx$; b) $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}dx$

Bài 4. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

1. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{x(x^2-1)}{3-3x}dx = \int \frac{x(x-1)(x+1)}{3(1-x)}dx = -\int \frac{x(x+1)}{3}dx$

$$= \frac{-1}{3}\int (x^2+x)dx = \frac{-1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) + C;$$

b) $I_2 = \int \frac{x^2-3x+2}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}dx$

$$= \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C.$$

c) $I_3 = \int \frac{1}{(1-x)(x+2)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x-1)+(x+2)}{(1-x)(x+2)}dx$

$$= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\ln|x+2| - \ln|1-x|\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{1-x}\right| + C$$

d) $I_4 = \int \frac{1}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-3)}dx$

$$= \frac{-1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}\right)dx = \frac{-1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x-3|\right) + C$$

$$= \frac{-1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right| + C\cdot$$

e) $I_5 = \int \frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin 2x}{\sin x + \cos x}dx$

$= \int \left(\sin x + \cos x\right)dx = -\cos x + \sin x + C.$

g) $I_6 = \int \frac{\tan x}{\sin 2x}dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x \cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$= \frac{1}{2}\tan x + C.$

h) $I_7 = \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}dx$

$= \int (\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + C.$

i) $I_8 = \int \tan 2x(\tan x - \cot x)dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x})dx$

$= \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos 2x}(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x})dx = 2\int (\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos 2x})dx$

$= 2\int (\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x})dx = -2\int dx = -2x + C.$

k) $I_9 = \int \frac{e^{2x}-1}{e^x - 1}dx = \int \frac{\left(e^x\right)^2 - 1}{e^x - 1}dx = \int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1}dx$

$= \int (e^x + 1)dx = e^x + x + C.$

l) $I_{10} = \int \sin 2x\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)dx = \int 2\sin x \cos x\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)dx$

$= \int 2\left(\frac{\sin x \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos x}\right)dx = 2\int \left(\cos x + \sin x\right)dx$

$= 2(\sin x - \cos x) + C.$

2. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{2x-3}{x^2 - 4x + 3}dx = \int \frac{(2x-4)+1}{x^2 - 4x + 3}dx$

$= \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}d(x^2 - 4x + 3) + \int \frac{1}{(x-1)(x-3)}dx$

$= \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}d(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right)dx$

$= \ln|x^2 - 4x + 3| + \frac{1}{2}\ln|x-3| - \ln|x-1| + C$

$= \ln|x^2 - 4x + 3| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C.$

b) $I_2 = \int \frac{x}{(x-2)^2(x+2)^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}dx$

$= \frac{1}{8}\int \left[\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2} - \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}\right]dx$

$= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right]dx$

$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{(x-2)^2}d(x-2) - \int \frac{1}{(x+2)^2}d(x+2)\right]$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{-1}{x-2} - \frac{-1}{x+2}\right) + C.$

c) $I_3 = \int \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}dx$

$= \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}dx = \int \frac{1}{\left[\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2}dx$

$= \int \frac{1}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}d\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{2}\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

d) $I_4 = \int \frac{2x}{(x-2)(x+1)^2}dx.$

$$\frac{2x}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)} + \frac{c}{(x-2)}$$

$\Rightarrow 2x = a(x-2) + b(x-2)(x+1) + c(x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x = (b+c)x^2 + (a - b + 2c)x - 2a - 2b + c$

Ta tìm a, b, c sao cho: $\begin{cases} b + c = 0 \\ a - b + 2c = 2 \\ -2a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{-4}{9} \\ c = \dfrac{4}{9} \end{cases}$

Vậy $\dfrac{2x}{(x-2)(x+1)^2} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{-4}{9}.\dfrac{1}{(x+1)} + \dfrac{4}{9}\dfrac{1}{(x-2)}$

$$I_4 = \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \frac{-4}{9}\int \frac{1}{(x+1)}dx + \frac{4}{9}\int \frac{1}{(x-2)}dx$$

$$= \frac{-2}{3(x+1)} + \frac{-4}{9}\ln|x+1| + \frac{4}{9}\ln|x+2| + C$$

$$= \frac{-2}{3(x+1)} + \frac{4}{9}\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| + C.$$

3. Tính :

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx$

$$= -\int (1 + \cot^2 x)d(\cot x) = -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C$$

b) $I_2 = \displaystyle\int \cos^3 x dx = \int \cos x.\cos^2 x dx = \int (1 - \sin^2 x)d(\sin x)$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{\sin 2x}dx = \int \frac{1}{2\sin x \cos x}dx$

$$= \int \frac{1}{2\dfrac{\sin x}{\cos x}.\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{2\tan x}d(\tan x) = \frac{1}{2}\ln|\tan x| + C$$

d) $I_4 = \displaystyle\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}d(\sin x) = \ln|\sin x| + C.$

4. Tính :

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$$= \int \frac{1}{1+e^x}d(e^x + 1) = \ln(e^x + 1) + C.$$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^5}dx = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^5}dx$

$$= \int \left[\frac{1}{(x+1)^4} - \frac{1}{(x+1)^5}\right]dx = \frac{-1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^4} + C.$$

c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}dx$

$$= \int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx + \int (2x-1)^{\frac{1}{2}}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}.\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + C = \frac{1}{6}\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}} + (2x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + C$$

d) $I_4 = \displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}dx = \int \frac{(x^3+1)-1}{x+1}dx$

$$= \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C.$$

5. Tính :

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx.$

Chọn nguyên hàm phụ là $J_2 = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$. Ta được :

$$I_1 + J_2 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}dx = \int dx = x + C$$

$$I_1 - J_2 = \int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{-1}{\cos x + \sin x}d(\cos x + \sin x)$$

$$= -\ln|\cos x + \sin x| + C.$$

Suy ra : $I_1 = \dfrac{1}{2}\left(x - \ln|\cos x + \sin x|\right) + C.$

b) $I_2 = \int (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)e^x dx$.

Ta có: $I_2 = \int (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)e^x dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x + C$

Lấy đạo hàm hai vế ta được :

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 1)e^x = (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)e^x = \left[ax^3 + (b + 3a)x^2 + (c + 2b)x + c + d\right]e^x$$

Để được đẳng thức, ta cần chọn a, b, c, d sao cho :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 2 \\ 2b + c = -3 \\ c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases}$$

Vậy $I_2 = \int (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)e^x dx = (x^3 - x^2 - x + 2)e^x + C$.

Bài 5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

1. Tính :

a) $I_1 = \int (3x + 2)\sin x dx = \int (3x + 2)d(-\cos x)$

$= -(3x + 2)\cos x - \int (-\cos x)3dx$

$= -(3x + 2)\cos x + 3\sin x + C$.

b) $I_2 = \int x\sin 2x dx = \frac{-1}{2}\int x d(\cos 2x)$

$= \frac{-1}{2}\left(x\cos 2x - \int \cos 2x dx\right) = \frac{-1}{2}\left(x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$

c) $I_3 = \int (1 - x)\sin x dx = \int (x - 1)d(\cos x)$

$= (x - 1)\cos x - \int \cos x dx = (x - 1)\cos x - \sin x + C$.

d) $I_4 = \int (\frac{-x}{2})\cos 3x dx = \frac{-1}{6}\int x d(\sin 3x)$

$= \frac{-1}{6}\left(x.\sin 3x - \int \sin 3x dx\right) = \frac{-1}{6}\left(x.\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x\right) + C$

e) $I_5 = \int xe^{1-x}dx = -\int x d(e^{1-x}) = -\left(xe^{1-x} - \int e^{1-x}dx\right)$

$= -\left(xe^{1-x} + e^{1-x}\right) + C = -xe^{1-x} - e^{1-x} + C$.

g) $I_6 = \int (x^2 + 2x)e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int (x^2 + 2x)de^{3x}$

$= \frac{1}{3}\left[(x^2 + 2x)e^{3x} - \int e^{3x}(2x + 2)dx\right]$

$= \frac{1}{3}\left[(x^2 + 2x)e^{3x} - \frac{1}{3}\int (2x + 2)de^{3x}\right]$

$= \frac{1}{3}\left[(x^2 + 2x)e^{3x} - \frac{1}{3}\left[(2x + 2)e^{3x} - 2\int e^{3x}dx\right]\right]$

$= \frac{1}{3}\left[(x^2 + 2x)e^{3x} - \frac{1}{3}\left[(2x + 2)e^{3x} - \frac{2}{3}e^{3x}\right]\right]$

$= \frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\right]e^{3x} + C$.

h) $I_7 = \int e^x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int e^x d(\sin 2x)$

$= \frac{1}{2}\left(e^x\sin 2x - \int e^x.\sin 2x dx\right) = \frac{1}{2}\left(e^x\sin 2x + \frac{1}{2}\int e^x d(\cos 2x)\right)$

$= \frac{1}{2}\left[e^x\sin 2x + \frac{1}{2}\left(e^x.\cos 2x - \int e^x.\cos 2x.dx\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e^x\sin 2x + \frac{1}{2}\left(e^x.\cos 2x - I_7\right)\right]$

Suy ra $I_7 = \frac{2}{5}e^x(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)$.

i) $I_8 = \int e^{-x+1}\sin x dx = \int e^{-x+1}d(\cos x)$

$= e^{-x+1}.\cos x + \int e^{-x+1}d(\sin x)$

$= e^{-x+1}.\cos x + e^{-x+1}\sin x + \int e^{-x+1}\sin x dx$

$= e^{-x+1}.\cos x + e^{-x+1}\sin x + I_8$.

Suy ra $I_8 = (\cos x + \sin x)e^{-x+1} + C$.

k) $I_9 = \int \ln(2x+1)dx = x\ln(2x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{2x+1}dx$

$= x\ln(2x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{2x+1-1}{2x+1}dx$

$= x\ln(2x+1) - \frac{1}{4}\left[\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}d(2x+1)\right]$

$= x\ln(2x+1) - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}\ln|2x+1|) + C$

$= \left(x + \frac{1}{8}\right)\ln(2x+1) - \frac{1}{4}x + C\cdot$

l) $I_{10} = \int (x+1)\ln(3x)dx = \int \ln(3x)d(\frac{x^2}{2}+x)$

$= (\frac{x^2}{2}+x).\ln(3x) - \int (\frac{x^2}{2}+x)\frac{1}{x}dx$

$= (\frac{x^2}{2}+x).\ln(3x) - \int (\frac{x}{2}+1)dx = (\frac{x^2}{2}+x).\ln(3x) - \frac{x^2}{4} - x + C$

2. Tính :

a) $I_1 = \int e^x\ln(2e^x+1)dx = \frac{1}{2}\int \ln(2e^x+1)d(2e^x+1)$

Đặt $t = 2e^x + 1$ ta có: $I_1 = \frac{1}{2}\int \ln t dt\cdot$

Đặt $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt$; $dv = dt \Rightarrow v = t$.

Ta được: $I_1 = \frac{1}{2}\left(t.\ln t - \int dt\right) = \frac{1}{2}\left(t.\ln t - t\right) + C$

Thay $t = 2e^x + 1$ ta có :

$I_1 = \frac{1}{2}\left[(2e^x+1).\ln(2e^x+1) - (2e^x+1)\right] + C$

b) $I_2 = \int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\left(\frac{1}{x}.\ln x - \int \frac{1}{x}.\frac{1}{x}dx\right)$

$= \frac{-1}{x}.\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}.\ln x + \frac{-1}{x} + C.$

c) $I_3 = \int x^5e^{x^3}dx = \int x^3.x^2e^{x^3}dx$. Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$

Ta có: $I_3 = \frac{1}{3}\int te^tdx = \frac{1}{3}\int tde^t = \frac{1}{3}\left(te^t - \int e^tdt\right)$

$= \frac{1}{3}\left(te^t - e^t\right) = \frac{e^t}{3}\left(t-1\right).$

d) $I_4 = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$. Đặt $u = xe^x \Rightarrow du = e^x(1+x)dx$;

$dv = \frac{1}{(x+1)^2}dx \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1}.$

$I_4 = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \frac{-1}{x+1}xe^x - \int \frac{-1}{x+1}e^x(1+x)dx$

$= \frac{-1}{x+1}xe^x + e^x + C.$

3. Tính :

a) $I_1 = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx = \int xd(-\cot x) = x(-\cot x) - \int (-\cot x)dx$

$= x(-\cot x) + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = x(-\cot x) + \int \frac{1}{\sin x}d(\sin x)$

$= x(-\cot x) + \ln|\sin x| + C.$

b) $I_2 = \int \ln(\tan x)d(\cos x) = \cos x.\ln(\tan x) - \int \frac{1}{\tan x}.\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$

$= \cos x.\ln(\tan x) - \int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}}.\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$

$= \cos x.\ln(\tan x) - \int \frac{1}{\sin x}dx$

$= \cos x.\ln(\tan x) - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C.$

(Tính nguyên hàm $I = \int \frac{1}{\sin x}dx$ *các bạn xem trong bài phương pháp biến đổi)*

c) $I_3 = \int x\sin\sqrt{x}dx$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$, ta được

$I_3 = \int t^2 \sin t.2tdt = 2\int t^3 \sin tdt$. Lấy tích phân từng phần ba lần ta được :

$$I_3 = -2x\sqrt{x}.\cos\sqrt{x} + 6x.\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}.\cos\sqrt{x} - 12.\sin\sqrt{x} + C$$

d) $I_4 = \int \sin^2 x.e^x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}.e^x dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\int e^x dx - \int \cos 2x.e^x dx\right)$$

Ta có : $J = \int \cos 2x e^x dx = \frac{1}{2}\int e^x d(\sin 2x)$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x.\sin 2x - \int \sin 2x.e^x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x.\sin 2x + \frac{1}{2}\int e^x d(\cos 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x.\sin 2x + \frac{1}{2}\left(e^x \cos 2x - \int e^x \cos 2x dx\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x.\sin 2x + \frac{1}{2}\left(e^x \cos 2x - J\right)\right].$$

Suy ra : $J = \frac{2}{5}e^x\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$.

Ta được :

$$I_4 = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{5}e^x\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$$

Chương 2. TÍCH PHÂN

Tích phân và nguyên hàm có mối liên hệ sâu sắc với nhau thông qua công thức Newton-Leibnitz. Do đó, việc tính được nguyên hàm là chúng ta đã giải gần xong bài toán tích phân (tất nhiên tích phân có điểm riêng của nó). Trong chương này, chúng ta cùng tìm hiểu phương pháp tính tích phân, các cách chọn ẩn phụ hay các phép biến đổi để xác định nguyên hàm (để tính tích phân), các bạn xem kỹ trong chương Nguyên hàm.

Bài 1. TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$.

$$\boxed{\text{Vậy } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}.$$

*** Lưu ý :**

– Ta gọi $\int_a^b$ *là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên,* $f(x)dx$ *là biểu thức dưới dấu tích phân và* $f(x)$ *là hàm số dưới dấu tích phân.*

– Trong trường hợp $a = b$ *và* $a > b$ *, ta quy ước* .

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}\,; \quad \boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}.$$ *(tích chất đổi cận)*

Ví dụ 1 :

1) $\int\limits_1^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$.

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

*** Nhận xét :**

– Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int\limits_a^b f(x)dx$ hay $\int\limits_a^b f(t)dt$. Có nghĩa là tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t ...

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du = \ldots}$$

Chẳng hạn : $\int\limits_1^2 x dx = \int\limits_1^2 t dt$ (vì ta có $\int\limits_1^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$ và $\int\limits_1^2 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$.

– ***Ý nghĩa hình học của tích phân :*** *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$, thì tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.*

Vậy $\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx}$.

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$

Ta có: $y = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$, nên hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn phía trên trục Ox (tính cả hai điểm (–1; 0); (1; 0)). Mà đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ có bán kính R = 1, theo ý nghĩa hình học của tích phân ta suy ra: $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{S}{2} = \frac{\pi.1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$. Với S là diện tích hình tròn có bán kính bằng 1.

2. Tính chất của tích phân

Tương tự tính chất của nguyên hàm, tích phân có các tính chất sau :

Tính chất 1 : $\boxed{\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx}$ (hằng số k trong dấu tích phân, có thể đưa ra ngoài dấu tích phân và ngược lại)

Ví dụ 3. $\int\limits_1^2 6x dx = 6.\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 6\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 6.\frac{3}{2} = 9$.

Tính chất 2 : $\boxed{\int\limits_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx}$

(tích phân của một tổng (hoặc hiệu) hai hàm, bằng tổng (hoặc hiệu) hai tích phân của hai hàm đó)

Ta mở rộng tính chất 2 như sau :

$$\boxed{\int\limits_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int\limits_a^b f_n(x)dx}$$

Ví dụ 4. $\int\limits_1^2 (6x - 2)dx = \int\limits_1^2 6x dx - \int\limits_1^2 2dx$ *(áp dụng tính chất 2)*

$= 6\int\limits_1^2 x dx - 2\int\limits_1^2 dx$ *(áp dụng tính chất 1)*

$= 6.\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - 2x\Big|_1^2 = 6.\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - 2.(2 - 1)$

$= 6.\frac{3}{2} - 2.1 = 7$.

Từ hai tính chất đó ta có :

$$\boxed{\int_a^b \left[mf(x) \pm ng(x)\right]dx = m\int_a^b f(x)dx \pm n\int_a^b g(x)dx}$$

Vậy ta có thể tính ví dụ 4 nhanh hơn như sau :

Ví dụ 4. $\int_1^2 (6x-2)dx = 6\int_1^2 xdx - 2\int_1^2 dx$ *(ta đã giảm bớt được một bước tính)*

$$= 6.\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - 2x\Big|_1^2 = 6.\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right) - 2.(2-1) = 7\cdot$$

* ***Lưu ý :*** *Ta có thể viết gộp* $6.\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - 2x\Big|_1^2 = \left(6.\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2$.

Tính chất 3 :

$$\boxed{\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx \quad (a<c<b)}$$

Tính chất thứ ba thường được dùng để tính tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối. Đây là một nét riêng của tích phân so với nguyên hàm !

Ví dụ 5. Tính : $I = \int_0^2 |x-1|dx$

Giải

Ta có : $|x-1| = x-1$ nếu $x \in [1;2]$; $|x-1| = -(x-1)$ nếu $x \in [0;1]$. Áp dụng tính chất ba, ta biến đổi tích phân đã cho thành tổng hai tích phân :

$$I = \int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^2 |x-1|dx$$

$$= -\int_0^1 (x-1)dx + \int_1^2 (x-1)dx = -\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{0}{2}-0\right)\right] + \left[\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\right] = 1\cdot$$

3. Tính tích phân theo định nghĩa

Tính tích phân theo định nghĩa, áp dụng công thức Newton-Leibnitz:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$

(trong thực hành tính tích phân, ta hiểu công thức này như sau : để tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$, *ta tính nguyên hàm* $\int f(x)dx$, *rồi tính giá trị của biểu thức* $F(b)-F(a)$. *Với* $F(x)$ *là một nguyên hàm của* $f(x)$*)*

Ví dụ 6. Tính :

a) $I_1 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

b) $I_2 = \int_1^2 \frac{2x^2+x}{x}dx$

c) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$;

d) $I_4 = \int_1^3 \frac{2}{2x-1}dx$

e) $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$;

g) $I_6 = \int_0^1 2^{3x}e^{3x+1}dx$

Giải

Ta có :

a) $I_1 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_1^4 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx = \int_1^4 x^{-\frac{2}{3}}dx = 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_1^4 = 3\left(4^{\frac{1}{3}}-1^{\frac{1}{3}}\right) = 3\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$

b) $I_2 = \int_1^2 \frac{2x^2+x}{x}dx = \int_1^2 \left(\frac{2x^2}{x}+\frac{x}{x}\right)dx = \int_1^2 (2x+1)dx = \left(x^2+x\right)\Big|_1^2$

$$= \left(2^2+2\right)-\left(1^2+1\right) = 4.$$

c) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) = \frac{1}{2}$

d) $I_4 = \int_1^3 \frac{2}{2x-1}dx = 2\int_1^3 \frac{1}{2x-1}dx = 2.\frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^3$

$$= \ln|2x-1|\Big|_1^3 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5\cdot$$

e) $I_5 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$

$= \cos(\frac{-\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4}) = 0$.

g) $I_6 = \int\limits_0^1 2^{3x}e^{3x+1}dx = \int\limits_0^1 2^{3x}e^{3x}edx = e\int\limits_0^1 \left(2e\right)^{3x}dx = e.\frac{(2e)^{3x}}{3\ln(2e)}\Bigg|_0^1$

$= \frac{e.(2e)^{3.1}}{3\ln(2e)} - \frac{e.(2e)^{3.0}}{3\ln(2e)} = \frac{e(8e^3-1)}{3\ln(2e)}$

***Chú ý** : chúng ta có thể trình bày gọn hơn như sau :*

a) $I_1 = \int\limits_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int\limits_1^4 x^{-\frac{2}{3}}dx = 3x^{\frac{1}{3}}\Bigg|_1^4 = 3\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$.

b) $I_2 = \int\limits_1^2 \frac{2x^2 + x}{x}dx = \int\limits_1^2 \left(2x + 1\right)dx = \left(x^2 + x\right)\Big|_1^2 = 4$

c) $I_3 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $I_4 = \int\limits_1^3 \frac{2}{2x - 1}dx = \ln\left|2x - 1\right|\Big|_1^3 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$.

e) $I_5 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

g) $I_6 = \int\limits_0^1 2^{3x}e^{3x+1}dx = e\int\limits_0^1 \left(2e\right)^{3x}dx = e.\frac{1}{3}.\frac{\left(2e\right)^{3x}}{\ln 2e}\Bigg|_0^1 = \frac{e\left(8e^3 - 1\right)}{3\ln 2e}$.

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1 = \int\limits_1^9 3x\sqrt{x}dx$;   b) $I_2 = \int\limits_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

c) $I_3 = \int\limits_2^4 \sqrt{5x - 3}dx$;   d) $I_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$

e) $I_5 = \int\limits_0^1 e^{3x+2}dx$;   g) $I_6 = \int\limits_0^1 e^{2x}e^{3x+1}dx$

2. Tính :

a) $I_1 = \int\limits_0^{\pi} \left(3\cos x - 2\sin x\right)dx$;   b) $I_2 = \int\limits_1^4 \frac{\sqrt[3]{x^2} + xe^x}{x}dx$

Bài 2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài học này chúng ta tìm hiểu một số phương pháp thường dùng để tính tích phân. Trong những bài học sau, sẽ xét các dạng tích phân có cách giải riêng, đặc biệt.

A. Phương pháp biến đổi

Ví dụ 1. Tính :

a) $I_1 = \int\limits_0^b \frac{1}{x^2 - a^2}dx \quad (0 < b < a)$;   b) $I_2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{9x^2 - 4}dx$.

Giải

a) $I_1 = \int\limits_0^b \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \int\limits_0^b \frac{1}{(x - a)(x + a)}dx$

$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^b \frac{(x + a) - (x - a)}{(x - a)(x + a)}dx = \frac{1}{2a}\int\limits_0^b \left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right]dx$

$= \frac{1}{2a}\left[\int\limits_0^b \frac{1}{x - a}d(x - a) - \int\limits_0^b \frac{1}{x + a}d(x + a)\right]$

$= \frac{1}{2a}\left(\ln\left|x - a\right| - \ln\left|x + a\right|\right)\Big|_0^b = \frac{1}{2a}\left(\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right|\right)\Bigg|_0^b$

$= \frac{1}{2a}\left(\ln\left|\frac{b - a}{b + a}\right| - \ln\left|\frac{0 - a}{0 + a}\right|\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{b - a}{b + a}\right|$.

b) Áp dụng bài toán trên ta có :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{9x^2-4}dx = \int_0^1 \frac{1}{(3x)^2-2^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(3x-2)(3x+2)}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{3x-2}d(3x-2) - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{3x+2}d(3x+2)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{1}{3}\ln|3x+2|\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{12}\left(\ln\left|\frac{3.1-2}{3.1+2}\right| - \ln\left|\frac{3.0-2}{3.0+2}\right|\right) = \frac{1}{12}\ln\frac{1}{5}\cdot$$

Ví dụ 2. Tính :

a) $I_1 = \int_m^n \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx \quad (a, b \notin [m;n]; a \neq b);$

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx\,.$

Giải

a) $$I_1 = \int_m^n \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\int_m^n \frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)}dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\int_m^n \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\int_m^n \frac{1}{x-a}d(x-a) - \int_m^n \frac{1}{x-b}d(x-b)$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\ln|x-a| - \ln|x-b|\right)\Big|_m^n = \frac{1}{a-b}\left(\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|\right)\Bigg|_m^n$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\ln\left|\frac{n-a}{n-b}\right| - \ln\left|\frac{m-a}{m-b}\right|\right) = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{(n-a)(m-b)}{(n-b)(m-a)}\right|.$$

b) $$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = \int_0^1 \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(x-2)}{(x-2)(x-3)} - \frac{(x-3)}{(x-2)(x-3)}\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{x-3}d(x-3) - \int_0^1 \frac{1}{x-2}d(x-2)$$

$$= \ln|x-3|\Big|_0^1 - \ln|x-2|\Big|_0^1 = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_0^1$$

$$= \ln\left|\frac{1-3}{1-2}\right| - \ln\left|\frac{0-3}{0-2}\right| = \ln\frac{4}{3}.$$

**** Nhận xét :***

– Hai tích phân tổng quát ở hai ví dụ trên là hai bài toán mà chúng ta thường gặp khi tính tích phân. Do đó, chúng ta nên thành thạo cách tính hai tích phân đó.

– Các bạn lưu ý những phép biến đổi sau :

$$+\ I_1 = \int_m^n \frac{1}{(x-a)(x+a)}dx = \frac{1}{2a}\int_m^n \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx\,.$$

$$+\ I_1 = \int_m^n \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\int_m^n \frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)}dx\,.$$

Ví dụ 3. Tính :

a) $I_1 = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}dx\,;$ b) $I_2 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx\,.$

Giải

a) Ta áp dụng mối quan hệ giữa $\frac{1}{x}$ và $\ln x$ để định hướng cách giải nhanh!

$$I_1 = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}dx = \frac{1}{3}\int_1^e (1+3\ln x)^{\frac{1}{2}} d(1+3\ln x) = \frac{2}{9}(1+3\ln x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^e = \frac{14}{9}$$

b) Ta áp dụng mối quan hệ giữa x và x^2 để định hướng cách giải nhanh!

$$I_2=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)=\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1=\ln 2\,.$$

**** Chú ý :** Nếu dùng phương pháp đổi biến số để giải ví dụ trên thì sẽ cho ta lời giải không nhanh và gọn hơn cách đã trình bày !*

Ví dụ 4. Tính :

a) $I_1=\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx$; b) $I_2=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

Giải

Áp dụng mối quan hệ giữa e^x và ae^x+b để định hướng cách giải nhanh!

a) $$I_1=\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}d(e^x+1)$$

$$=\ln(e^x+1)\Big|_0^1=\ln(\frac{e+1}{2}).$$

b) $$I_2=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{-(e^x+1)+2e^x}{e^x+1}dx$$

$$=-\int_0^1 dx+2\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}d(e^x+1)$$

$$=\left[-x+2\ln(e^x+1)\right]\Big|_0^1=-1+2\ln\frac{e+1}{2}.$$

Ví dụ 5. Tính :

a) $I_1=\int_0^{\pi} \sin 2x.\cos^2 x dx$; b) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x+1}dx$.

Giải

a) Áp dụng mối quan hệ giữa sinx và cosx để định hướng cách giải nhanh !

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin 2x.\cos^2 x dx=2\int_0^{\pi}\sin x.\cos^3 x dx=-2\int_0^{\pi}\cos^3 x d(\cos x)$$

$$=-\frac{\cos^4 x}{2}\Big|_0^{\pi}$$

b) Ta có : $$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx=\frac{1}{2}.\frac{1}{-\frac{1}{2}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}};$$

$$=-(\tan 0-\tan\frac{\pi}{4})=1\,.$$

Ví dụ 6. Tính : $I=\int_1^3 \frac{dx}{e^x-1}$ (CĐ – ĐH khối D – 2009)

Giải

Các bạn để ý đồng nhất thức $1=e^x-(e^x-1)$ *thì ta có lời giải của bài toán là :*

$$I=\int_1^3 \frac{dx}{e^x-1}=\int_1^3 \frac{e^x-(e^x-1)}{e^x-1}dx=\int_1^3 \frac{e^x}{e^x-1}dx-\int_1^3 \frac{(e^x-1)}{e^x-1}dx$$

$$=\int_1^3 \frac{1}{e^x-1}d(e^x-1)-\int_1^3 dx=\left(\ln\left|e^x-1\right|-x\right)\Big|_1^3$$

$$=\left(\ln\left|e^3-1\right|-3\right)-\left(\ln\left|e^1-1\right|-1\right)=\ln\left|\frac{e^3-1}{e-1}\right|-2=\ln\left(e^2+e+1\right)-2$$

Ví dụ 7. Tính : $$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$$

Giải

Ta dùng tích phân phụ để tính. Các bạn để ý đồng nhất thức sau :

$\sin^2 x-3\cos^2 x=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)$. *Lời giải cho bài toán là :*

Chọn tích phân phụ là $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$

Ta có: $\mathrm{I}-3\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{3\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx=\left(-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=1-\sqrt{3}. \quad (1)$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}.\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right).\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]-\frac{1}{2}\ln\left[\tan\left(0+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}=\frac{1}{4}\ln 3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình xác định I :

$$\begin{cases}\mathrm{I}-3\mathrm{J}=1-\sqrt{3}\\ \mathrm{I}+\mathrm{J}=\frac{1}{4}\ln 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{I}-3\mathrm{J}=1-\sqrt{3}\\ 3\mathrm{I}+3\mathrm{J}=\frac{3}{4}\ln 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{I}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\ln 3+1-\sqrt{3}\right)\\ \mathrm{J}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\ln 3-1+\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

Vậy $\mathrm{I}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\ln 3+1-\sqrt{3}\right)$.

Ví dụ 8. Tính : $\mathrm{I}=\int_1^2 e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$.

Giải

Ta có :

$$e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)=e^x.\ln x+\frac{e^x}{x}=\left(e^x\right)'.\ln x+e^x.\left(\ln x\right)'=\left(e^x.\ln x\right)'.$$

Suy ra $\mathrm{I}=\int_1^2 e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(e^x.\ln x\right)'dx=\int_1^2 d\left(e^x.\ln x\right)$

$$=\left(e^x.\ln x\right)\Big|_1^2=e^2.\ln 2-e^1.\ln 1=e^2.\ln 2.$$

**** Nhận xét :** Bài này chúng ta đã khéo léo đưa hàm số dưới dấu tích phân về đạo hàm của một hàm số. Rồi áp dụng công thức :*

$$\boxed{\int f'(x)dx=\int d\left[f(x)\right]=f(x)+C}$$

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1=\int_0^1\frac{1}{1+2e^{-x}}dx$; b) $I_2=\int_0^1\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$.

c) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x+1}dx$; d) $I_4=\int_0^1\frac{6x^2}{x^3+1}dx$.

2. Tính :

a) $I_1=\int_0^{\pi}\sin 2x.\sin^2 x dx$; b) $I_2=\int_1^e\frac{\sqrt[3]{1+7\ln x}}{x}dx$.

c) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2+x}dx$; d) $I_3=\int_0^1\frac{1}{4x^2-9}dx$

B. Phương pháp đổi biến số

Tương tự phần nguyên hàm, chúng ta sẽ xét hai trường hợp khi tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ bằng phương pháp đổi biến số :

– ***Trường hợp 1 :*** *Đặt u là một hàm số của x.*

– ***Trường hợp 2 :*** *Đặt x là một hàm số của u.*

1. Phép đặt u là một hàm số của x : u = u(x)

Giả sử cần tính $I = \int_a^b f(x)dx$, ta thực hiện như sau :

Bước 1 : + Chọn ẩn phụ thích hợp $u = u(x)$.

+ Xác định vi phân $du = du(x)$ *hoặc* $du^2 = du^2(x)$ ...

+ Biểu thị $f(x)dx$ *theo* u *và* du. *Giả sử rằng* $f(x)dx = g(u)du$.

Bước 2 : Đổi cận : $x = a \Rightarrow u = u(a); x = b \Rightarrow u = u(b)$.

Bước 3 : Tính $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

2. Phép đặt x là một hàm số của u : x = $\varphi(u)$

Giả sử cần tính $I = \int_a^b f(x)dx$, ta thực hiện như sau :

Bước 1 : + Chọn ẩn phụ thích hợp $x = \varphi(u)$.

+ Xác định vi phân $dx = d\varphi(u) = \varphi'(u)du$.

+ Biểu thị $f(x)dx$ *theo* u *và* du. *Giả sử rằng* $f(x)dx = g(u)du$.

Bước 2 : Đổi cận: $x = a \Rightarrow u = \alpha$; $x = b \Rightarrow u = \beta$; *(với* $a = \varphi(\alpha)$ và $b = \varphi(\beta)$*).*

Bước 3 : Tính $I = \int_\alpha^\beta g(u)du$.

**** Chú ý :***

– Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lí sau đây : *Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a;b]$. *Giả sử hàm số* $x = \varphi(u)$ *có đạo hàm liên tục trên đoạn* $[\alpha;\beta]$ *sao cho* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *và* $a \le \varphi(u) \le b$ *với mọi* $u \in [\alpha;\beta]$.

Khi đó $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du}$

– Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số, chúng ta vận dụng những kiến thức đã trình bày trong phần phương pháp đổi biến số tính nguyên hàm, để định hướng cách chọn ẩn phụ cũng như hướng giải bài toán.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính : $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ (CĐ – ĐH khối A – 2003)

Giải

Các bạn để ý quan hệ giữa x^2 *và* x : $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+4)$ *để định hướng phép đặt ẩn phụ! Ta có lời giải của bài toán là :*

$$I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}.$$

Đặt $u = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow u^2 = x^2 + 4$ và $udu = xdx$.

Đổi cận: $x = \sqrt{5} \Rightarrow u = 3$; $x = 2\sqrt{3} \Rightarrow u = 4$.

Ta có: $I = \int_3^4 \frac{udu}{(u^2-4)u} = \int_3^4 \frac{du}{(u^2-4)} = \int_3^4 \frac{du}{(u-2)(u+2)}$

$$= \frac{1}{4}\int_3^4 \frac{(u+2)-(u-2)}{(u-2)(u+2)}du = \frac{1}{4}\int_3^4 \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_3^4 \frac{1}{u-2}d(u-2) - \int_3^4 \frac{1}{u+2}d(u+2)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính : $I = \int_1^2 \frac{xdx}{1+\sqrt{x-1}}$ (CĐ – ĐH khối A – 2004)

Giải

Các bạn để ý, nếu đặt $u=\sqrt{x+1}$ thì x và dx đều có thể biểu diễn được qua u và du; và biểu thức dưới dấu tích phân không còn dấu căn thức! Ta có lời giải của bài toán là :

$$I=\int_1^2\frac{xdx}{1+\sqrt{x-1}}$$

Đặt $u=\sqrt{x-1}\Rightarrow u^2=x-1$ và $2udu=dx$.

Đổi cận : $x=1\Rightarrow u=0$; $x=2\Rightarrow u=1$.

Ta có : $I=\int_0^1\frac{(u^2+1)2u}{1+u}du=2\int_0^1\frac{u^3+u}{1+u}du=2\int_0^1\frac{(u^3+1)+(u+1)-2}{1+u}du$

$$=2\int_0^1\frac{(u+1)(u^2-u+1)+(u+1)-2}{1+u}du=2\int_0^1\left[(u^2-u+1)+1-\frac{2}{1+u}\right]du$$

$$=2\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+2u-2\ln|1+u|\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{3}-4\ln 2.$$

Ví dụ 3. Tính : $I=\int_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln xdx}{x}$ (CĐ – ĐH khối B – 2004)

Giải

Các bạn để ý quan hệ giữa $\ln x$ *và* $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$ *để định hướng phép đặt ẩn phụ! Ta có lời giải của bài toán là :*

$$I=\int_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln xdx}{x}=\int_1^e\sqrt{1+3\ln x}.\ln x.d(\ln x).$$

Đặt $u=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow u^2=1+3\ln x$ và $\frac{2}{3}udu=\frac{1}{x}dx$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=1$; $x=e\Rightarrow u=2$.

Ta có :

$$I=\int_1^2\frac{u(u^2-1)}{3}.\frac{2}{3}udu=\frac{2}{9}\int_1^2(u^4-u^2)du=\frac{2}{9}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{116}{135}$$

Ví dụ 4. Tính : $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ (CĐ – ĐH khối A – 2005)

Giải

Các bạn để ý quan hệ giữa $\sin x$ *và* $\cos x$: $\sin xdx=d(-\cos x)$ *để định hướng phép đặt ẩn phụ! Ta có lời giải của bài toán là :*

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(2\cos x+1)}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\cos x+1)}{\sqrt{1+3\cos x}}d(-\cos x)$$

Đặt $u=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow u^2=1+3\cos x$ và $-\frac{2}{3}udu=\sin xdx$.

Đổi cận : $\mathrm{x}=0\Rightarrow \mathrm{u}=2$; $\mathrm{x}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \mathrm{u}=1$.

Ta có : $\mathrm{I}=\int_2^1\frac{\left(2.\frac{u^2-1}{3}+1\right)}{u}.\frac{-2u}{3}du=\frac{2}{9}\int_1^2(2u^2+1)du$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{2u^3}{3}+u\right)\Bigg|_1^2=\frac{2}{9}\left[\left(\frac{2.2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{2.1^3}{3}+1\right)\right]=\frac{34}{27}.$$

Ví dụ 5. Tính :

a) $I_1=\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}dx\quad(a>0)$; b) $I_2=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2+x+1}dx$.

Giải

a) *Các bạn để ý dấu hiệu "*x^2+a^2*" để chọn ẩn phụ* $x=a\tan u$. *Ta có lời giải của bài toán là :*

$$I_1=\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}dx\qquad(a>0)$$

Đặt $x=a\tan u$, $(\frac{-\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2})\Rightarrow dx=\frac{a}{\cos^2 u}du=a(1+\tan^2 u)du$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = a \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

Ta có: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\left(1+\tan^2 u\right)}{a^2\left(1+\tan^2 u\right)}du = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{4a}$.

b) Ta có : $I_2 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$.

Đặt $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\tan u, \left(\frac{-\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 u)du$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$ và $x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$.

Ta được : $I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2 u+\frac{3}{4}}.\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 u)du$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

*** *Chú ý :*** *Tích phân* $I_1 = \int\limits_0^a \frac{1}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$ *là một tích phân cơ bản nên ta cần thành thạo việc tính và áp dụng tích phân này.*

Ví dụ 6. Tính :

a) $I_1 = \int\limits_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \ (a>0)$; b) $I_2 = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Giải

a) Các bạn để ý dấu hiệu " $a^2 - x^2$ *" để chọn ẩn phụ* $x = a\sin u$. *Ta có lời giải của bài toán là :*

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \ (a>0)$$

Đặt x = asinu, $\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a\cos u du$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{a}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$.

Ta có : $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos u du}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos u du}{a\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos u du}{a\left|\cos u\right|}$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} du = u\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

*** Chú ý :** Ta có $\left|\cos u\right| = \cos u$ vì $\cos u > 0$ với $u \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

b) Các bạn để ý dấu hiệu " $1 - x^2$ *" để chọn ẩn phụ* $x = \sin u$. *Ta có lời giải của bài toán là :*

$$I_2 = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Đặt $x = \sin u, \left(\frac{-\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \cos u du$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$

Ta có : $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}.\cos u du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u}.\cos u du$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos u\right|.\cos u du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2u\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

*** Chú ý :** Ta có $\left|\cos u\right| = \cos u$ vì $\cos u \geq 0$ với $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ví dụ 7. Tính :

a) $I_1 = \int\limits_{-a}^{0} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx \quad (a > 0)$; b) $I_2 = \int\limits_{-1}^{0}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

Giải

a) Các bạn để ý dấu hiệu " $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ *" để chọn ẩn phụ* $x = a\cos 2u$. *Ta có lời giải của bài toán là :*

$$I_1 = \int\limits_{-a}^{0} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx \quad (a > 0)$$

Đặt $x = a\cos 2u \Rightarrow dx = -2a\sin 2udu$, $\left(0 < u \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Đổi cận : $x = -a \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$; $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Ta có : I}_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{a+a\cos 2u}{a-a\cos 2u}}(-2a\sin 2udu) = 2a\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}\sin 2udu$$

$$= 2a\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cot^2 u}.\sin 2udu = 2a\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\cot u\right|\sin 2udu$$

$$= 2a\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin u}.2\sin x\cos xdx = 4a\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 udu = 4a\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2u}{2}du$$

$$= 2a\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

*** Chú ý :** Ta có $\left|\cot u\right| = \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$ vì $u \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Các bạn để ý dấu hiệu "$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$" để chọn ẩn phụ $x = \cos 2u$. Ta có lời giải của bài toán là : $I_2 = \int\limits_{-1}^{0}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

Đặt $x = \cos 2u \Rightarrow dx = -2\sin 2udu$, $\left(0 < u \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Đổi cận : $x = -1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$; $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Ta có : } I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1+\cos 2u}{1-\cos 2u}}(-2\sin 2u)du = 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}.(\sin 2u)du$$

$$= 4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos u}{\sin u}\right|\sin u\cos udu = 4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin u}\sin u\cos udu = 4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 udu$$

$$= 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du = 2\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

*** Chú ý :** Ta có $\left|\tan u\right| = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$ vì $u \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ví dụ 8. Tính : $I = \int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Giải

Nếu chọn ẩn phụ là $u = \sqrt{x^2+1}$ *thì không khả thi rồi !*

Đặt : $\sqrt{x^2+1} = x - u \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 - 2xu + u^2$

$$\Rightarrow x = \frac{u^2-1}{2u} \Rightarrow dx = \frac{u^2+1}{2u^2} \text{ và } \sqrt{x^2+1} = \frac{-(u^2+1)}{2u}$$

Đổi cận : $x=0 \Rightarrow u=-1$; $x=1 \Rightarrow u=1-\sqrt{2}$.

Ta được : $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{-2u}{u^2+1}.\frac{u^2+1}{2u^2}du=-\int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{du}{u}$

$$=-\ln|u|\Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}}=-\ln\left(\sqrt{2}-1\right).$$

*** Cách khác:** *Các bạn để ý dấu hiệu "* $\sqrt{x^2+1}$ *" để chọn ẩn phụ x = tan u. Ta có lời giải của bài toán là :*

Đặt : $x=\tan u \Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2 u}du$; $\left(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\right)$.

Đổi cận : $x=0 \Rightarrow u=o$; $x=1 \Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$.

Ta được: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u+1}}.\frac{1}{\cos^2 u}du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\cos u|}{\cos^2 u}du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u}{1-\sin^2 u}du$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin u-1)(\sin u+1)}d(\sin u)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin u-1}-\frac{1}{\sin u+1}\right)d(\sin u)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin u-1}d(\sin u-1)-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin u+1}d(\sin u+1)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin u-1}{\sin u+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|.$$

*** Chú ý :** Hai cách đều cho đáp án đúng vì:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right|=-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

BÀI TẬP

1. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin x}+\cos x)\cos x dx$ (CĐ – ĐH khối D – 2005)
2. Tính : $I=\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$ (CĐ – ĐH khối D – 2011)
3. Tính : $I=\int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x.\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$
4. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$ (CĐ – ĐH khối A – 2006)
5. Tính : $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$
6. Tính : $I=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

C. Phương pháp tính tích phân từng phần

Giả sử ta cần tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$. Ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1 : Biến đổi tích phân ban đầu về dạng

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx.$$

Bước 2 : Đặt $\begin{cases} u=f_1(x) \\ dv=f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f_1^{'}(x)dx \\ v=\int f_2(x)dx \end{cases}$

(tìm v ta không lấy hằng số " C")

Bước 3 : Khi đó $\boxed{I=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu}$.

Chú ý :

– Ta chọn u và dv sao cho việc tính du *(tính* $(f_1^{'}(x)dx)$ *và tìm v (tính* $v=\int f_2(x)dx$*) phải dễ ! Đồng thời tích phân* $\int_a^b vdu$ *cũng phải được tính dễ hơn tích phân* $I=\int_a^b f(x)dx$ *!*

– Cơ sở của phương pháp này là định lí sau : *Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì*

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

Ví dụ 1. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx$; b) $I_2 = \int_0^1 \ln(x+1)dx$.

Giải

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx$

Đặt $u = x+1 \Rightarrow du = dx$; $dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$

Ta được : $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx = -\cos x.(x+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$

$$= -\cos x.(x+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left[\cos\frac{\pi}{2}.(\frac{\pi}{2}+1) - \cos 0.(0+1)\right] + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin o\right) = 2.$$

b) $I_2 = \int_0^1 \ln(x+1)dx$

Đặt $u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{1}{x+1}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Ta được : $I_2 = \int_0^1 \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx\right)$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 + \ln|x+1|\Big|_0^1 = \left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]\Big|_0^1$$

$$= \left[(1+1)\ln(1+1) - 1\right] - \left[(0+1)\ln(0+1) - 0\right] = 2\ln 2 - 1.$$

**** Chú ý :** Ta có thể giải nhanh hơn như sau :*

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)d(-\cos x)$

$$= -\cos x(x+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx = -\cos x(x+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

b) $I_2 = \int_0^1 \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Ví dụ 2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^1 xe^x dx$; b) $I_2 = \int_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx$.

Giải

a) Ta có : $I_1 = \int_0^1 xe^x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

Ta được : $I_1 = \int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left(xe^x - e^x\right)\Big|_0^1$

$$= \left(1.e^1 - e^1\right) - \left(0.e^0 - e^0\right) = 1.$$

b) Ta có : $I_2 = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx$

Đặt $u = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow du = (2x + 2)dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Ta được :

$$I_2 = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx = (x^2 + 2x - 1)e^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (2x + 2)e^x dx$$

Xét tích phân $J = \int\limits_0^1 (2x + 2)e^x dx$

Đặt $u = 2x + 2 \Rightarrow du = 2dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$J = \int\limits_0^1 (2x + 2)e^x dx = (2x + 2)e^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x 2dx = \left[(2x + 2)e^x - 2e^x\right]\Big|_0^1$$

Suy ra : $I_2 = (x^2 + 2x - 1)e^x \Big|_0^1 - \left[(2x + 2)e^x - 2e^x\right]\Big|_0^1$

$$= \left[(x^2 + 2x - 1)e^x - (2x + 2)e^x + 2e^x\right]\Big|_0^1$$

$$= (x^2 - 1)e^x \Big|_0^1 = (1 - 1)e^1 - (0^2 - 1)e^0 = 1.$$

**** Chú ý :** Ta có thể giải nhanh hơn như sau :*

a) Ta có :

$$I_1 = \int\limits_0^1 xe^x dx = \int\limits_0^1 x de^x = xe^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = \left(xe^x - e^x\right)\Big|_0^1 = 1.$$

b) Ta có : $I_2 = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x - 1)de^x$

$$= (x^2 + 2x - 1)e^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (2x + 2)e^x dx$$

$$= (x^2 + 2x - 1)e^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (2x + 2)de^x$$

$$= (x^2 + 2x - 1)e^x \Big|_0^1 - \left[(2x + 2)e^x - 2e^x\right]\Big|_0^1 = (x^2 - 1)e^x \Big|_0^1 = 1.$$

**** Nhận xét :***

– Câu b) ta phải tính tích phân từng phần hai lần mới ra kết quả!

**** Cách khác cho câu b):***

Ta xét : $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x + C$

Lấy đạo hàm hai vế:

$$\Rightarrow (x^2 + 2x - 1)e^x = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 1)e^x = \left[ax^2 + (2a + b)x + b + c\right]e^x$$

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 2 \\ b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$

Do đó ta có $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = (x^2 - 1)e^x + C$

Vậy $I_2 = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx = (x^2 - 1)e^x \Big|_0^1 = 1.$

Ví dụ 3. Tính :

a) $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{xe^x}{(x + 1)^2} dx$; b) $I_2 = \int\limits_1^e \frac{1 + x\ln x}{x} . e^x dx .$

Giải

a) Ta có :

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \int\limits_0^1 \frac{\left[(x+1) - 1\right]e^x}{(x+1)^2} dx = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx - \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx \quad (*).$$

Chúng ta tính tích phân : $J_1 = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$

Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$; $dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1}$

Ta có: $J_1 = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx = -\frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{-e^x}{x+1} dx$. Thế vào (*) ta được:

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx - \left(-\frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{-e^x}{x+1} dx \right)$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx + \frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx = \frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$$

b) Ta có : $I_2 = \int_1^e \frac{1 + x\ln x}{x}.e^x dx = \int_1^e \frac{e^x}{x}dx + \int_1^e e^x \ln x dx$ (*).

Chúng ta tính tích phân $J_2 = \int_1^e e^x \ln x dx$.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

Ta được: $J_2 = \int_1^e e^x \ln x dx = e^x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}dx$. Thế vào (*) suy ra :

$$I_2 = \int_1^e \frac{e^x}{x}dx + J_2 = \int_1^e \frac{e^x}{x}dx + e^x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}dx = e^x \ln x\Big|_1^e = e^e.$$

**** Chú ý :** Chúng ta có thể trình bày nhanh, gọn hơn như sau :*

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int_0^1 \frac{[(x+1)-1]e^x}{(x+1)^2}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx - \left[\int_0^1 e^x d\left(\frac{-1}{x+1}\right)\right] = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx - \left(-\frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-e^x}{x+1}dx\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx + \frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx = \frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$$

b) $I_2 = \int_1^e \frac{1 + x\ln x}{x}.e^x dx = \int_1^e \frac{e^x}{x}dx + \int_1^e e^x \ln x dx$

$$= \int_1^e \frac{e^x}{x}dx + \left(e^x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}dx\right) = e^x \ln x\Big|_1^e = e^e.$$

**** Cách khác :***

a) $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}}{(\mathrm{x}+1)^2}\mathrm{dx}$

Cách 2 : Đặt $u = xe^x \Rightarrow du = e^x(x+1)dx$;

$$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1}.$$

Ta có: $I_1 = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = -\frac{xe^x}{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = \frac{-e}{2} + e - 1 = \frac{e}{2} - 1$.

Cách 3 : Ta có :

$$\frac{xe^x}{(x+1)^2} = \frac{[(x+1)-1]e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x}{x+1} - \frac{e^x}{(x+1)^2} = \left(e^x\right)'.\frac{1}{x+1} + e^x.\left(\frac{1}{x+1}\right)'$$

$$= \left(e^x.\frac{1}{x+1}\right)'.$$

Vậy ta có : $I_1 = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int_0^1 \left(e^x.\frac{1}{x+1}\right)' dx = \int_0^1 d\left(e^x.\frac{1}{x+1}\right)$

$$= \left(e^x.\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$$

b) $\mathrm{I}_2 = \int_1^e \frac{1 + \mathrm{x}\ln \mathrm{x}}{\mathrm{x}}.\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$

Ta có : $\frac{1 + x\ln x}{x}.e^x = \frac{1}{x}.e^x + \ln x.e^x = (\ln x)'.e^x + \ln x.(e^x)' = (e^x.\ln x)'$

Vậy ta có : $I_2 = \int_1^e \frac{1 + x\ln x}{x}.e^x dx = \int_1^e (e^x.\ln x)' dx = \int_1^e d(e^x.\ln x)$

$$= (e^x.\ln x)\Big|_1^e = e^e.$$

Ví dụ 4. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$;　　b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} dx$.

Giải

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

Ta có $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$　　(1)

Xét $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$.

Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Ta được $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \right)$$

hay $I_1 = e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + I_1 \right)$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} e^0 \left(\sin 0 - \cos 0 \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$$

b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} dx$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$ và $2tdt = dx$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Ta có : $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t.2tdt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$

Xét $\frac{I_2}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$.

Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$ và $dv = \cos t dt \Rightarrow v = \sin t$.

Ta có : $\frac{I_2}{2} = t \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = t \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(t \sin t + \cos t \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} \right) - \left(0 \sin 0 + \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Vậy $I_2 = \pi - 2$.

* ***Chú ý :*** *Chúng ta có thể trình bày nhanh, gọn hơn như sau :*

a) Ta có :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(e^x) = e^x \sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$= e^x \sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(e^x)$$

$$= e^x \sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(e^x \cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \right)$$

Suy ra $I_1 = e^x \sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - e^x \cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - I_1$

Hay $I_1 = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$.

b) Ta có : $I_2 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} dx = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} d\left(\sqrt{x}\right)^2 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} 2\sqrt{x} \cos\sqrt{x} d\left(\sqrt{x}\right)$

$$= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} 2\sqrt{x} d\left(\sin\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} \sin\sqrt{x}\Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}} - \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} 2 \sin\sqrt{x} d\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= 2\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}\Bigg|_0^{\frac{\pi^2}{4}} + 2\cos\sqrt{x}\Bigg|_0^{\frac{\pi^2}{4}} = \left(2\sqrt{x}.\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi^2}{4}}$$

$$= \pi - 2.$$

*** Cách khác :**

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

Ta xét : $\int e^x \sin x dx = \left(a \sin x + b \cos x + c \right) e^x + C$

Lấy đạo hàm hai vế :

$$\Rightarrow e^x \sin x = \left(a \cos x - b \sin x \right) e^x + \left(a \sin x + b \cos x + c \right) e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x \sin x = \left[(a+b)\cos x + (a-b)\sin x + c\right]e^x$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}$$

Vậy $\displaystyle\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(\sin x - \cos x\right)e^x + C$.

Suy ra $\displaystyle I_1 = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$.

Ví dụ 5. Tính :

a) $\displaystyle I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx$;   b) $\displaystyle I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x)dx$.

Giải

a) $\displaystyle I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}dx$

Đặt $\displaystyle u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx;\ dv = \frac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow v = \tan x$.

b) Ta có : $\displaystyle I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx = \frac{x}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

$$= \frac{x}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \frac{x}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}d(\cos x)$$

$$= \frac{x}{2}.\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{x}{2}.\tan x + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{8}.\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right) - \left(\frac{0}{2}.\tan 0 + \frac{1}{2}\ln\left|\cos 0\right|\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Ta để ý quan hệ giữa $\sin x$ và $\cos x$ để định hướng cách giải.

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln(\sin x)dx$$

Đặt $\displaystyle u = \ln(\sin x) \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x}dx;\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

Ta có: $\displaystyle I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln(\sin x)dx = \sin x.\ln\left(\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$$= \sin x.\ln\left(\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x.\ln\left(\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\sin x.\ln(\sin x) - \sin x\right]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right) - 1.$$

**** Chú ý :*** *Chúng ta có thể trình bày nhanh, gọn hơn như sau :*

a) $\displaystyle I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2}d(\tan x)$

$$= \frac{x}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{x}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}d(\cos x)$$

$$= \left(\frac{x}{2}.\tan x + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) $\displaystyle I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)d(\sin x)$

$$= \sin x.\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x.\ln(\sin x) - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right) - 1.$$

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$; b) $I_2 = \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$

c) $I_3 = \int_0^1 x.e^{2x}\,dx$; d) $I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^1 x.2^x\,dx$; b) $I_2 = \int_1^3 x\log_3 x\,dx$

c) $I_3 = \int_1^2 (2x+1)\ln\left(x^2+x+2\right)dx$; d) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ln(1+\sin x)\,dx$.

Bài 3. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

1. Dạng toán thường gặp

Dạng 1 : $I = \int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{ax+b}dx$ ($a \neq 0$; $P(x)$ *là đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 1)*

Cách giải : *thực hiện phép chia đa thức P(x) cho nhị thức ax + b hoặc phân tích P(x) dựa trên nghiệm của mẫu thức ax + b.*

Ví dụ 1. Tính : $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx$

Giải

Cách 1 : phân tích dựa trên nghiệm của mẫu thức.

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^3+1)-1}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}-\ln 2 \cdot$$

Cách 2 : thực hiện phép chia tử thức cho mẫu thức.

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}-\ln 2 \cdot$$

**** Nhận xét :***

– Bản chất của hai cách không khác nhau!

– Ta có thể dùng phép đặt ẩn phụ u = x + 1 để giải !

Ví dụ 2. Tính : $I = \int_0^1 \frac{x-2}{2x+3}dx$

Giải

Ta thực hiện chia tử thức cho mẫu thức hoặc phân tích dựa trên nghiệm của mẫu thức. Ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{x-2}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-4}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(2x+3)-7}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\frac{7}{2x+3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx - \frac{7}{4}\int_0^1 \frac{1}{2x+3}d(2x+3) = \frac{1}{2}x\Big|_0^1 - \frac{7}{4}\ln|2x+3|\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}-0\right)-\left(\frac{7}{4}\ln|2.1+3|-\frac{7}{4}\ln|2.0+3|\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{2}\ln\frac{5}{3}\right)\cdot$$

Dạng 2 : $I = \int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$ ($a \neq 0$)

Cách giải:

– Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn 2 : Sử dụng phương pháp hệ số bất định hoặc phân tích P(x) dựa trên nghiệm của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ (nếu tam thức bậc hai có nghiệm) hoặc phân tích P(x) thành biểu thức chứa đạo hàm của mẫu để tách hàm số dưới dấu tích phân về dạng tổng. Trong trường hợp tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ vô nghiệm, áp dụng cách tính tích phân cơ bản $I = \int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2+a^2}dx$ ($a > 0$), đặt x = atanu.

– Nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng 2 : thực hiện phép chia đa thức P(x) cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ rồi áp dụng theo trường hợp trên.

Ví dụ 1. Tính : $I = \int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6}dx$

Giải

Thực hiện phép chia tử thức cho mẫu thức ta có:

$$x^3 = (x+5)(x^2 - 5x + 6) + 19x - 30$$

Vậy $I = \int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6}dx = \int\limits_0^1 \left(x + 5 + \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}\right)dx$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}dx = \frac{11}{2} + \int\limits_0^1 \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}dx.$$

Xét $J = \int\limits_0^1 \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}dx$

Cách 1 : phân tích dựa trên nghiệm của mẫu thức.

$$J = \int\limits_0^1 \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}dx = \int\limits_0^1 \frac{19(x-2) + 8}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{19}{x-3} + \frac{8}{(x-2)(x-3)}\right)dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{19}{x-3} + 8.\frac{(x-2) - (x-3)}{(x-2)(x-3)}\right)dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{19}{x-3} + \frac{8}{x-3} - \frac{8}{x-2}\right)dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{27}{x-3} - \frac{8}{x-2}\right)dx$$

$$= \left(27\ln|x-3| - 8\ln|x-2|\right)\Big|_0^1 = 35\ln 2 - 27\ln 3.$$

Suy ra $I = \frac{11}{2} + 35\ln 2 - 27\ln 3.$

Cách 2 : phân tích tử thức thành biểu thức chứa đạo hàm của mẫu thức.

$$J = \int\limits_0^1 \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{19(2x-5) + 35}{x^2 - 5x + 6}dx$$

$$= \frac{19}{2}\int\limits_0^1 \frac{(2x-5)}{x^2 - 5x + 6}dx + \frac{35}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}dx$$

$$= \frac{19}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}d(x^2 - 5x + 6) + \frac{35}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$= \frac{19}{2}\ln\left|x^2 - 5x + 6\right|\Big|_0^1 + \frac{35}{2}\int\limits_0^1 \frac{(x-2) - (x-3)}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$= \frac{19}{2}\ln\left|x^2 - 5x + 6\right|\Big|_0^1 + \frac{35}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$= \frac{19}{2}\ln\left|x^2 - 5x + 6\right|\Big|_0^1 + \frac{35}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{19}{2}\left(\ln\left|1^2 - 5.1 + 6\right| - \ln|6|\right) + \frac{35}{2}\left(\ln\left|\frac{1-3}{1-2}\right| - \ln\left|\frac{0-3}{0-2}\right|\right)$$

$$= \frac{19}{2}(\ln 2 - \ln 6) + \frac{35}{2}\left(\ln 2 - \ln\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{2}\ln\frac{1}{3} + \frac{35}{2}\ln\frac{4}{3}$$

$$= \frac{19}{2}\ln\frac{1}{3} + \frac{35}{2}\ln 4 + \frac{35}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{54}{2}\ln\frac{1}{3} + \frac{35}{2}\ln 2^2 = 35\ln 2 - 27\ln 3$$

Suy ra $I = \frac{11}{2} + 35\ln 2 - 27\ln 3.$

**** Chú ý :** phân tích tam thức bậc hai* $ax^2 + bx + c$ *khi nó có hai nghiệm phân biệt* $x_1; x_2$ *là :* $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Cách 3 : Sử dụng phương pháp hệ số bất định

Ta chọn các số a, b sao cho :

$$\frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6} = \frac{19x - 30}{(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3) + b(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow 19x - 30 = a(x-3) + b(x-2) \Leftrightarrow 19x - 30 = (a+b)x - 3a - 2b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 19 \\ -3a - 2b = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 27 \end{cases}$$

Vậy $J = \int\limits_0^1 \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{27}{x-3} - \frac{8}{x-2}\right)dx$

$$= \left(27\ln|x-3| - 8\ln|x-2|\right)\Big|_0^1 = 35\ln 2 - 27\ln 3.$$

Suy ra $I = \frac{11}{2} + 35\ln 2 - 27\ln 3.$

Ví dụ 2. Tính : $I = \int\limits_1^2 \frac{x}{4x^2 - 4x + 1}dx$

Giải

Ta có: $I=\int_1^2\frac{x}{4x^2-4x+1}dx=\int_1^2\frac{x}{(2x-1)^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(2x-1)+1}{(2x-1)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left[\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{(2x-1)^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^2\frac{1}{2x-1}d(2x-1)+\frac{1}{4}\int_1^2\frac{1}{(2x-1)^2}d(2x-1)$$

$$=\left(\frac{1}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{4}.\frac{1}{2x-1}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{4}\left(\ln 3+\frac{2}{3}\right).$$

Ví dụ 3. Tính : $I=\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}$

Giải

Ta có: $I=\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-1}^0\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)$

Đặt $x+1=\tan u\Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2 u}du=(\tan^2 u+1)du$

Đổi cận $x=-1\Rightarrow u=0;\ x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$

Ta được $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 u+1}(\tan^2 u+1)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{\pi}{4}.$

2. Một số dạng khác

Ví dụ 1. Tính : $I=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$ (ĐH khối B – 2012)

Giải

Ta sử dụng quan hệ giữa x và x^2 để định hướng cách đặt ẩn phụ!

$$I=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx=\int_0^1\frac{x^2.x}{x^4+3x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x^4+3x^2+2}dx^2$$

Đặt $u=x^2\Rightarrow du=dx^2$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=0;\ x=1\Rightarrow u=1$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u}{u^2+3u+2}du=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u}{(u+1)(u+2)}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2(u+1)-(u+2)}{(u+1)(u+2)}du=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{2(u+1)}{(u+1)(u+2)}-\frac{(u+2)}{(u+1)(u+2)}\right]du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{u+2}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{2}\left(2\ln|u+2|-\ln|u+1|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(2\ln 3-3\ln 2).$$

**** Chú ý : Ta có thể trình bày nhanh hơn như sau***

$$I=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2(x^2+1)-(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+2)}du=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{x^2+2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\ln|x^2+2|-\ln|x^2+1|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(2\ln 3-3\ln 2).$$

Ví dụ 2. Tính : $I=\int_1^2\frac{1}{x^3+x}dx$.

Giải

Cách 1 : Ta sử dụng quan hệ giữa x và x^2 để định hướng cách đặt ẩn phụ $u=x^2$ hoặc làm nhanh như sau :

$$I=\int_1^2\frac{1}{x^3+x}dx=\int_1^2\frac{x}{x(x^3+x)}dx=\int_1^2\frac{x}{x^2(x^2+1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x^2(x^2+1)}dx^2=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx^2=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x^2}dx^2-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x^2+1}d\left(x^2+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2|\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right|\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

Cách 2 : biến đổi tử thức chứa đạo hàm bậc nhất của mẫu thức.

$$I=\int_1^2\frac{1}{x^3+x}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(3x^2+3)-(3x^2+1)}{(x^3+x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{3x^2+3}{x^3+x}dx-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{3x^2+1}{x^3+x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{3(x^2+1)}{x(x^2+1)}dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}d(x^3+x)$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^3+x|\Big|_1^2 = \left(\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 10\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}\cdot$$

Cách 3 *:* sử dụng phương pháp hệ số bất định.

Ta cần chọn a, b, c sao cho :

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 1 = a(x^2+1) + x(bx+c) \Leftrightarrow 1 = (a+b)x^2 + cx + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

Vậy ta có : $I = \int_1^2 \frac{1}{x^3+x}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}\right)dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1) = \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(\ln|2| - \frac{1}{2}\ln|2^2+1|\right) - \left(\ln|1| - \frac{1}{2}\ln|1^2+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}\cdot$$

Ví dụ 3. Tính : $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx\cdot$

Giải

Ta sử dụng quan hệ giữa x^3 và x^4 để định hướng cách đặt ẩn phụ $u = x^4$ hoặc làm như sau :

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\left(x^4\right)^2+1}dx^4$$

Đặt $x^4 = \tan u \Rightarrow dx^4 = \frac{1}{\cos^2 u}du = (\tan^2 u + 1)du$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

Ta được : $I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 u + 1}(\tan^2 u + 1)du = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{1}{4}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}$.

**** Nhận xét :*** *Các tích phân của hàm hữu tỉ thường được giải bằng phương pháp phân tích, biến đổi và phương pháp đổi biến số. Phương pháp tích phân từng phần thì ít được dùng hơn. Trên đây là một số ví dụ minh họa về tích phân hàm hữu tỉ, các dạng khác bạn đọc tham khảo trong những phần nguyên hàm.*

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 7x + 12}dx$;

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{x-2}{3x+1}dx$

2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$

3. Tính :

a) $I_3 = \int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9}{\left(x^5+1\right)^3}dx$;

b) $I_2 = \int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}dx$.

Bài 4. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

1. Dạng toán thường gặp

Dạng 1 : sử dụng thuần túy công thức lượng giác

Các công thức lượng giác cần nhớ :

– Công thức hạ bậc

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$;

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

– Công thức nhân đôi

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

– Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$$

– Áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

– Công thức cộng

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

– Các công thức cơ bản khác

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1;\quad \tan^2 a+1=\frac{1}{\cos^2 a};\quad \cot^2 a+1=\frac{1}{\sin^2 a}\ldots$$

Ví dụ 1. Tính : $I=\int_0^{\pi}\sin^2 xdx$.

Giải

Áp dụng công thức hạ bậc.

$$I=\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x.\sin 5xdx$.

Giải

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x.\sin 5xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x-\cos 8x)\,dx.$$

$$=\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{16}\sin 2\pi\right)-\left(\frac{1}{4}\sin 0-\frac{1}{16}\sin 0\right)=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 3. Tính : $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\sin 2x}dx$.

Giải

Áp dụng công thức nhân đôi.

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\sin 2x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x.\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan x\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Ví dụ 4. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x.\cos 2xdx$.

Giải

Áp dụng công thức hạ bậc:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x.\cos 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos 2x+1+\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\sin 2x+x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)-\frac{1}{4}\left(\sin 0+0+\frac{1}{4}\sin 0\right)=\frac{\pi}{8}.$$

Dạng 2 : $I=\int_a^b \sin^n x.\cos^m x dx$

Cách giải:

– Nếu m, n chẵn dương ta dùng công thức hạ bậc

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

– Nếu n lẻ và dương thì đặt u = cosx.

– Nếu m lẻ và dương thì đặt u = sinx.

– Nếu m, n chẵn âm thì đặt u = tanx hoặc u = cotx.

* ***chú ý:*** *Chúng ta cũng để ý quan hệ giữa sinx và cosx; tan x và* $\frac{1}{\cos^2 x}$*; cotx và* $\frac{1}{\sin^2 x}$*;* $\sin^2 x$*,* $\cos^2 x$ *và sin2x để định hướng phép đặt ẩn phụ và cách giải !*

Ví dụ 1. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x.\cos^3 x dx$.

Giải

Dựa vào cách giải đã trình bày như trên (với $n=2;\ m=3$) hoặc quan hệ giữa *sinx* và *cosx* , ta có ngay cách đặt ẩn phụ là $u=\sin x$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x.\cos^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x.\cos^2 x.\cos x dx$$

Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos x dx$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=0;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$.

Ta có : $I=\int_0^1 u^2\left(1-u^2\right)du=\int_0^1\left(u^2-u^4\right)du$

$$=\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

* ***chú ý :*** *Chúng ta có thể trình bày nhanh hơn như sau :*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x.\cos^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x.(1-\sin^2 x)\cos x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\sin^4 x\right)d(\sin x)=\left(\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

Ví dụ 2. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^6 x}dx$.

Giải

Dựa vào cách giải đã trình bày như trên (với n = 0; m = –6) hoặc quan hệ giữa *tan x* và $\frac{1}{\cos^2 x}$, ta có ngay cách đặt ẩn phụ là $u=\tan x$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2.\frac{1}{\cos^2 x}dx.$$

Đặt $u=\tan x\Rightarrow du=\frac{1}{\cos^2 x}dx$ và $\frac{1}{\cos^2 x}=\tan^2 x+1=u^2+1$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=0;\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=1$.

Ta có : $I = \int_0^1 \left(u^2+1\right)^2 du = \int_0^1 \left(u^4+2u^2+1\right)du = \left(\frac{u^5}{5}+\frac{2u^3}{3}+u\right)\Bigg|_0^1 = \frac{28}{15}$.

**** chú ý :** Chúng ta có thể trình bày nhanh hơn như sau :*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 . \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)^2 d(\tan x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right) d(\tan x)$$

$$= \left(\tan x + \frac{2\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{28}{15}.$$

Ví dụ 3. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos^4 x dx$.

Giải

Dựa vào cách giải đã trình bày như trên (với n = 2; m = 4) , ta có ngay cách giải bài toán là dùng công thức hạ bậc !

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}.\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 2x\right)(1+\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right)(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4x)(1+\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 4x.\cos 2x) dx .$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1}{2}\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x\right) dx$$

$$= \frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}.$$

Ví dụ 4. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$.

Giải

Dựa vào cách giải đã trình bày như trên (với n = 3; m = 0) hoặc quan hệ giữa *sinx* và *cosx,* ta có ngay cách giải bài toán là đặt $u = \cos x$. Hoặc trình bày nhanh bài giải như sau :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right) d(\cos x)$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right) d(\cos x) = \left(\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

2. Một số dạng toán khác

Ví dụ 1. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$.

Giải

Cách 1 :

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}.\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2-\left(1+t^2\right)}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2} dt - \int_0^1 dt = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - t\Big|_0^1$$

Xét $J = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

Đặt $t = \tan u \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 u}du = \left(\tan^2 u + 1\right)du$

Đổi cận $t = 0 \Rightarrow u = 0; t = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

Ta được $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\left(1+\tan^2 u\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{4}$.

Vậy ta có: $I = 2.\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

Cách 2 :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)-1}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$$

Xét $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Vậy $I = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

Cách 3 :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2\frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\tan^2\frac{x}{2} + 1\right) - 1\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ví dụ 2. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan x}$.

Giải

Sử dụng tích phân phụ.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$$

Xét tích phân phụ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$, ta có :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \ln\left|\cos x + \sin x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right| - \ln 1 = \ln\sqrt{2}.$$

Suy ra $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \ln\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$.

*** Cách khác** : *Đặt u = tanx.*

Ví dụ 3. Tính : $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

Giải

Áp dụng công thức cộng ta có đồng nhất thức sau :

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - x\right] = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x$$

Ta có : $I = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right]dx$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x}d(\sin x)-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}d\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \left[2\ln|\sin x|-2\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\ln\frac{3}{2}.$$

*** Cách khác :** vẫn áp dụng công thức cộng

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\left[\sin x.\cos\frac{\pi}{6}+\cos x.\sin\frac{\pi}{6}\right]}dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\left(\sin x\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\frac{1}{2}\right)}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cot x\frac{1}{2}\right)}dx$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cot x\frac{1}{2}\right)}d\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cot x\frac{1}{2}\right) = -2\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\cot x\frac{1}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2\left(\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\cot\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\cot\frac{\pi}{6}.\frac{1}{2}\right|\right) = -2\ln\frac{2}{3} = 2\ln\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 4. Tính : $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2+\sqrt{3}\sin x-\cos x}dx$.

Giải

Áp dụng công thức cộng để biến đổi :

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{3}.\sin x-\cos\frac{\pi}{3}.\cos x\right) = -2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2+\sqrt{3}\sin x-\cos x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}d\left[-\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 13. Tính : $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$ (CĐ - ĐH khối A – 2011)

Giải

Các bạn để ý đạo hàm của mẫu thức

$$(x\sin x+\cos x)' = \sin x+x\cos x-\sin x = x\cos x$$

Do đó, ta có lời giải cho bài toán là :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+\cos x+x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+\cos x}{x\sin x+\cos x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x\sin x+\cos x}d(x\sin x+\cos x)$$

$$= x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}+\ln|x\sin x+\cos x|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\ln\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right].$$

**** Nhận xét :** Nói chung, các tích phân của hàm lượng giác thường được giải bằng phương pháp đổi biến số, phương pháp biến đổi... Phương pháp tích* *phân từng phần thì ít được dùng hơn. Trên đây là một vài ví dụ minh họa về tích phân hàm lượng giác, các dạng khác bạn đọc tham khảo trong những phần trước.*

BÀI TẬP

1. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

2. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$

3. Tính : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \sin x \cos x}{2 + \sin x} dx$

4. Tính : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$

Bài 5. TÍCH PHÂN HÀM CHỨA CĂN THỨC

Ví dụ 1. Tính : $I = \int_0^9 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} dx$.

Giải

Dùng phương pháp biến đổi

$$I = \int_0^9 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^9 (\sqrt{x}-1) dx$$

$$= \int_0^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x\right)\Bigg|_0^9 = \left(\frac{2}{3}.9^{\frac{3}{2}} - 9\right) - 0 = 9$$

Ví dụ 2. Tính : $I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$.

Giải

Dùng phương pháp đổi biến số :

Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

Ta có $I = \int_0^1 \frac{u^2}{1+u} .2udu = 2\int_0^1 \frac{u^3}{1+u} du = 2\int_0^1 \frac{(u^3+1)-1}{1+u} du$

$$= 2\int_0^1 \frac{(u+1)(u^2-u+1)-1}{1+u} du = 2\int_0^1 (u^2-u+1) du - 2\int_0^1 \frac{1}{1+u} du$$

$$= 2\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1|\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{5}{6} - \ln 2\right).$$

Ví dụ 3. Tính : $I = \int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}} dx$.

Giải

Dùng phương pháp đổi biến số :

Đặt $u = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow u^3 = x + 1 \Rightarrow 3u^2 du = dx$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 7 \Rightarrow u = 2$.

Ta có $I = \int_1^2 \frac{u^3+1}{u} .3u^2 du = 3\int_1^2 (u^4 + u) du = 3\left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{231}{10}.$

Ví dụ 4. Tính : $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$. (CĐ - ĐH khối D – 2011)

Giải

Dùng phương pháp đổi biến số.

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x + 1 \Rightarrow udu = dx$; đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 4 \Rightarrow u = 3$.

Ta có $I = \int_1^3 \frac{4\frac{u^2-1}{2} - 1}{u+2} udu = \int_1^3 \frac{2u^2-3}{u+2} udu = \int_1^3 \frac{2u^3-3u}{u+2} du$. Thực hiện phép chia tử thực cho mẫu thức ta có phân tích :

$$I = \int_1^3 \left(\frac{(u+2)(2u^2-4u+5)-10}{u+2}\right) du = \int_1^3 \left(2u^2 - 4u + 5 - \frac{10}{u+2}\right) du$$

$$= \left(\frac{2u^3}{3} - \frac{4u^2}{2} + 5u - 10\ln|u+2|\right)\Bigg|_1^3 = \frac{34}{3} + 10\ln\frac{3}{5}.$$

Ví dụ 5. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$. (CĐ - ĐH khối A – 2006)

Giải

Biến đổi rồi dùng phương pháp đổi biến số (chú ý quan hệ giữa $\sin 2x$ và $\sin^2 x, \cos^2 x$).

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx.$$

Đặt $u=\sqrt{1+3\sin^2 x}\Rightarrow u^2=1+3\sin^2 x\Rightarrow 2udu=3\sin 2xdx$

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=1;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=2$.

Ta có : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx=\int_1^2\frac{1}{u}.\frac{2}{3}udu$

$$=\frac{2}{3}\int_1^2 du=\frac{2}{3}u\Big|_1^2=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Chú ý : ta có thể đặt $u=1+3\sin^2 x$.

Ví dụ 6. Tính : $I=\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$.

Giải

Dùng phương pháp đổi biến số (để ý quan hệ giữa x và x^2 để định hướng cách đặt ẩn phụ).

$$I=\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx=\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}.xdx$$

Đặt $u=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow u^3=x^2+1\Rightarrow 3u^2du=2xdx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1;\ x=\sqrt{7}\Rightarrow u=2$.

Ta có $I=\int_1^2\frac{u^3-1}{u}.\frac{3}{2}u^2du=\frac{3}{2}\int_1^2(u^4-u)du$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{141}{20}.$$

Ví dụ 7. Tính : $I=\int_4^5\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx$.

Giải

Dùng phương pháp đổi biến để giải.

$$I=\int_4^5\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx=\int_4^5\frac{1}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}dx$$

Đặt $u=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}$

$$\Rightarrow du=\left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}+\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\right)dx=\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}}{2.\sqrt{(x-2)(x-3)}}dx$$

$$\Rightarrow\frac{2du}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}}=\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}$$

hay $\frac{2du}{u}=\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}$.

Đổi cận : $x=4\Rightarrow u=\sqrt{2}+1;\ x=5\Rightarrow u=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Ta được : $I=\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{2du}{u}=2\ln|u|\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$=2\left(\ln\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|-\ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right)=2\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}\right|.$$

Nhận xét : *Các tích phân của hàm chứa căn thức thường được giải bằng phương pháp đổi biến số. Trong nhiều trường hợp, chúng ta thường chọn căn thức để đặt ẩn phụ. Phương pháp biến đổi và phương pháp tích phân từng phần thì ít được dùng hơn. Trên đây là một số ví dụ minh họa về tích phân hàm chứa căn thức, các dạng khác bạn đọc tham khảo trong những phần khác.*

BÀI TẬP

1. Tính: a) $I_1=\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; b) $I_2=\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$

2. Tính: a) $I_1=\int_4^{12}\frac{1}{x\sqrt{2x+1}}dx$; b) $I_2=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

Bài 6. TÍCH PHÂN HÀM MŨ VÀ LÔGARIT

Ví dụ 1. Tính :

a) $I_1 = \int_0^1 3^x e^x dx$; b) $I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Giải

Dùng phương pháp biến đổi để giải.

a) $I_1 = \int_0^1 3^x e^x dx = \int_0^1 (3e)^x dx = \left.\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}\right|_0^1 = \frac{3e-1}{\ln(3e)}$.

b) $I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx$; b) $I_2 = \int_1^e \frac{e^x}{e^x+1} dx$.

Giải

Dùng phương pháp biến đổi để giải, lưu ý các mối quan hệ định hướng cách giải.

a) $I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2} d\left(x^2\right) = \left.\frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1 = \frac{e-1}{2}$.

b) $I_2 = \int_1^e \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_1^e \frac{1}{e^x+1} d\left(e^x+1\right) = \ln\left|e^x+1\right|\Big|_1^e$

$$= \ln\left|e^e+1\right| - \ln\left|e^1+1\right| = \ln\left|\frac{e^e+1}{e+1}\right|.$$

Ví dụ 3. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; b) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$.

Giải

Dùng phương pháp đổi biến số để giải. Để ý quan hệ giữa e^x và $e^x + 1$ để định hướng cách giải.

a) $I_1 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Đặt $u = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow u^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2udu = e^x dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{2}$; $x = \ln 3 \Rightarrow u = 2$.

Ta có : $I_1 = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{u}.\frac{2udu}{u^2-1} = 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{du}{u^2--1} =2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{du}{(u-1)(u+1)}$

$$= \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^2$$

$$= \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^2 = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{3\left(\sqrt{2}-1\right)}.$$

b) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}.e^x dx$

Đặt $u = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow u^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2udu = e^x dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{2}$; $x = \ln 2 \Rightarrow u = \sqrt{3}$.

Ta có: $I_1 = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2-1}{u}.2udu = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(u^2-1\right) du = 2\left(\frac{u^3}{3} - u\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$

$$= 2\left[\left(\frac{(\sqrt{3})^3}{3} -- \sqrt{3}\right) - \left(\frac{(\sqrt{2})^3}{3} - \sqrt{2}\right)\right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ví dụ 4. Tính : $I = \int_1^e \frac{\ln x\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x} dx$

Giải

Dùng phương pháp đổi biến số để giải. Để ý quan hệ giữa $\frac{1}{x}$ và $\ln x$ để định hướng cách đặt ẩn phụ.

$$I = \int_1^e \frac{\ln x\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x} dx.$$

Đặt $u = \sqrt[3]{1+\ln^2 x} \Rightarrow u^3 = 1+\ln^2 x \Rightarrow 3u^2du = 2\ln x.\dfrac{1}{x}dx$

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 1$; $x = e \Rightarrow u = \sqrt[3]{2}$.

Ta có : $I_1 = \displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{2}} u.\frac{3u^2}{2}du = \frac{3}{2}\int_1^{\sqrt[3]{2}} u^3du = \frac{3}{2}.\frac{u^4}{4}\Bigg|_1^{\sqrt[3]{2}}$

$$= \frac{3}{8}\left(2^{\frac{4}{3}}-1\right) = \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{16}-1\right)$$

Ví dụ 5. Tính : $I = \displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln\left(\ln x\right)}{x}dx$

Giải

Dùng phương pháp đổi biến số để giải. Để ý quan hệ giữa $\dfrac{1}{x}$ và lnx để định hướng cách đặt ẩn phụ.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}dx$

Đổi cận $x = e^2 \Rightarrow t = 2$; $x = e^3 \Rightarrow t = 3$.

Ta có: $I = \displaystyle\int_2^3 \ln t dt$. Đến đây ta lại dùng phương pháp tích phân từng phần.

Đặt $u = \ln t \Rightarrow du = \dfrac{1}{t}dt$; $dv = dt \Rightarrow v = t$.

Ta được: $I = \displaystyle\int_2^3 \ln t dt = t\ln t\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{t}tdt = t\ln t\Big|_2^3 - t\Big|_2^3$

$$= \left(t\ln t - t\right)\Big|_2^3 = \left(3\ln 3 - 3\right) - \left(2\ln 2 - 2\right) = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$$

$$= \ln 3^3 - \ln 2^2 - \ln e = \ln\frac{27}{4e}.$$

**** Cách khác :** Ta có thể trình bày nhanh hơn theo cách sau*

$$I = \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln\left(\ln x\right)}{x}dx = \int_{e^2}^{e^3} \ln\left(\ln x\right)d\left(\ln x\right)$$

$$= \ln\left(\ln x\right).\left(\ln x\right)\Big|_{e^2}^{e^3} - \int_{e^2}^{e^3} \ln x.\frac{1}{\ln x}d\left(\ln x\right)$$

$$= \ln\left(\ln x\right).\left(\ln x\right)\Big|_{e^2}^{e^3} - \int_{e^2}^{e^3} d\left(\ln x\right)$$

$$= \left[\ln\left(\ln x\right).\left(\ln x\right) - \left(\ln x\right)\right]\Big|_{e^2}^{e^3} = \ln\frac{27}{4e}.$$

Ví dụ 6. Tính : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ (ĐH Khối A – Năm 2010)

Giải

Ta áp dụng phương pháp biến đổi (lưu ý quan hệ giữa e^x và $ae^x + b$).

Ta có : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx$

$$= \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 x^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+2e^x}d(1+2e^x)$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln\left|1+2e^x\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e+1}{3}\right).$$

Ví dụ 7. Tính : $I = \displaystyle\int_0^1 \left(e^{-2x} + x\right)e^x dx$ (CĐ Khối A – Năm 2009)

Giải

Ta áp dụng phương pháp biến đổi, ta có :

$$I = \int_0^1 \left(e^{-2x} + x\right)e^x dx = \int_0^1 e^{-x}dx + \int_0^1 xe^x dx$$

$$= -e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 xe^x dx = 1 - \frac{1}{e} + \int_0^1 xe^x dx.$$

Xét tích phân $J = \displaystyle\int_0^1 xe^x dx$. Áp dụng phương pháp tích phân từng phần.

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

Ta được $J = \int\limits_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1\cdot$

Suy ra $I = 1 - \frac{1}{e} + J = 2 - \frac{1}{e}\cdot$

* ***Chú ý :*** *Ta có thể trình bày nhanh hơn theo cách sau*

$$I = \int\limits_0^1 \left(e^{-2x} + x\right)e^x dx = \int\limits_0^1 e^{-x}dx + \int\limits_0^1 xe^x dx = -e^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 x de^x$$

$$= -e^{-x}\Big|_0^1 + xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = -e^{-x}\Big|_0^1 + xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{e}\cdot$$

* ***Nhận xét :*** *Trên đây là những tích phân của hàm mũ và Lôgarit chủ yếu giải được bằng phương pháp biến đổi và phương pháp đổi biến số. Dạng tích phân hàm số mũ và Lôgarit giải được bằng phương pháp tích phân từng phần các bạn xem trong phần phương pháp tích phân từng phần.*

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1 = \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$; b) $I_2 = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

2. Tính :

a) $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{\sin x} dx$; b) $I_2 = \int\limits_1^e \left(x \ln x\right)^2 dx$.

Bài 7. TÍCH PHÂN HÀM CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Giả sử cần tính tích phân $I = \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$. Ta thực hiện như sau :

– Xét dấu $f(x)$ *trên đoạn* $\left[a;b\right]$.

– Sử dụng tính chất sau của tích phân để bỏ dấu giá trị tuyệt đối, rồi tính :

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ *(với a < c < b)*

Ví dụ 1. Tính : $I = \int\limits_0^2 \left|x^2 - 4x + 3\right|dx\cdot$

Giải

Dùng phương pháp biến đổi để giải.

Ta có : $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = 3 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ với $x \in [0; 1]$; $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ với $x \in [1; 2]$.

Vậy ta có $I = \int\limits_0^1 \left|x^2 - 4x + 3\right|dx + \int\limits_1^2 \left|x^2 - 4x + 3\right|dx$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx + \int\limits_1^2 -\left(x^2 - 4x + 3\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 - \frac{8}{3} + 8 - 6 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 2\cdot$$

Ví dụ 2. Tính : $I = \int\limits_0^2 \left|x^2 - 1\right|dx\cdot$

Giải

Dùng phương pháp biến đổi để giải.

Ta có : $x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $x^2-1\ge 0$ với $x\in[1;2]$; $x^2-1\le 0$ với $x\in[0;1]$.

Vậy ta có $I=\int\limits_0^2\left|x^2-1\right|dx=\int\limits_0^1\left|x^2-1\right|dx+\int\limits_1^2\left|x^2-1\right|dx$

$$=-\int\limits_0^1\left(x^2-1\right)dx+\int\limits_1^2\left(x^2-1\right)dx$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_1^2$$

$$=-\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=2.$$

Ví dụ 3. Tính : $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$.

Giải

Dùng phương pháp biến đổi để giải.

Ta có : $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin x\right|dx$

Xét x trên khoảng $(0;2\pi)$ ta có : $\sin x=0\Leftrightarrow x=\pi$

Từ đó suy ra $\sin x\ge 0$ với $x\in[0;\pi]$; $\sin x\le 0$ với $x\in[\pi;2\pi]$.

Vậy ta có $I=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin x\right|dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}\left|\sin x\right|dx+\sqrt{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left|\sin x\right|dx$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}\sin x dx+\sqrt{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(-\sin x\right)dx$$

$$=\sqrt{2}\left[\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]=4\sqrt{2}.$$

Ví dụ 4. Tính : $I=\int\limits_0^{\pi}\left|\cos x\right|\sqrt{\sin x}dx$.

Giải

Dùng phương pháp biến đổi để giải.

Xét x trên đoạn $[0;\pi]$ ta có : $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Từ đó suy ra $\cos x\ge 0$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x\le 0$ với $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Vậy ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x\right|\sqrt{\sin x}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\cos x\right|\sqrt{\sin x}dx$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}dx$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}d(\sin x)-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}d(\sin x)$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2}}d(\sin x)-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{1}{2}}d(\sin x)$$

$$=\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

**** Nhận xét :** Các tích phân của hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối thường được giải bằng phương pháp biến đổi. Chìa khóa để giải quyết dạng toán này là việc bỏ dấu giá trị tuyệt đối.*

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $I_1=\int\limits_0^3\left|x^2-5x+6\right|dx$; b) $I_2=\int\limits_0^3\left|x^2-4\right|dx$

2. Tính :

a) $I_1=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}.dx$; b) $I_2=\int\limits_0^{\pi}\left|\cos x\right|\sin x dx$

Bài 8. MỘT SỐ LỚP TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

Sau đây, chúng ta sẽ xét phép đặt ẩn phụ tổng quát mà dựa vào nó, chúng ta có thể giải được một số lớp tích phân đặc biệt ! Trước tiên, mời các bạn nghiên cứu bài toán sau :

Bài toán : Cho hàm số *f(x)* liên tục trên R. Chứng minh rằng :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Bài giải

Xét tích phân $I = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

Đặt u = a + b – x ⇒ x = a + b – u và dx = –du.

Đổi cận : x = a ⇒ u = b; x = b ⇒ u = a

Ta có : $I = \int_b^a f(u).(-du) = -\int_b^a f(u)du = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$ *(do tích phân không phụ thuộc biến số lấy tích phân. Các bạn xem lại trong bài Tích phân)*

Vậy $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ (đpcm).

**** Nhận xét :*** *Bài toán này gợi ý cho chúng ta cách đặt ẩn phụ u = a + b – x (cách đặt ẩn phụ bằng tổng hai cận trừ cho biến) để chuyển tích phân ban đầu thành tích phân mới (khi mà tích phân ban đầu phức tạp, thậm chí là khó giải được !) cũng như việc vận dụng đẳng thức* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ *để tính tích phân* $I = \int_a^b f(x)dx$. *Các bạn theo dõi lớp tích phân đặc biệt thông qua các ví dụ minh họa sau :*

Ví dụ 1. Tính : $I = \int_0^2 (-x^3+3x^2-4x+2)^3 dx$.

Giải

Dùng cách đặt ẩn phụ bằng tổng hai cận trừ cho biến.

Đặt u = 0 + 2 – x = 2 – x ⇒ x = 2 – u và dx = –du

Đổi cận: x = 0 ⇒ u = 2; x = 2 ⇒ u = 0

Ta có : $I = -\int_2^0 \left[-(2-u)^3 + 3(2-u)^2 - 4(2-u) + 2\right]^3 du$

$$= \int_0^2 \left[-\left(8-12u+6u^2-u^3\right) + 3\left(4-4u+u^2\right) - 8 + 4u + 2\right]^3 du$$

$$= \int_0^2 \left(u^3-3u^2+4u-2\right)^3 du = -\int_0^2 \left(-u^3+3u^2-4u+2\right)^3 du$$

Do tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên ta có :

$$\int_0^2 \left(-u^3+3u^2-4u+2\right)du = \int_0^2 (-x^3+3x^2-4x+2)^3 dx = I$$

Vậy ta có I = –I hay I = 0.

Ví dụ 2. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$.

Giải

Dùng cách đặt ẩn phụ bằng tổng hai cận trừ cho biến.

Đặt $u = 0 + \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$ và dx = –du

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

Ta có :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\cos u}{1+\sin u}\right)du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin u}{1+\cos u}\right)^{-1} du = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin u}{1+\cos u}\right)du.$$

Do tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin u}{1+\cos u}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = I$$

Vậy ta có I = –I hay I = 0.

**** Nhận xét :***

– Bài toán Ví dụ 1 nếu giải theo lối thông thường thì chúng ta sẽ khai triển biểu thức $(-x^3+3x^2-4x+2)^3$ để tính. Cách này giải được bài toán nhưng cách giải không hề nhanh và gọn được so với cách đã trình bày như trên ! Nếu chúng ta lại thay số mũ 3 bởi số mũ 2013 chẳng hạn, liệu chúng ta khai triển có khả thi không ? dĩ nhiên câu trả lời là không rồi !

– Hai ví dụ trên minh họa cho lớp tích phân sau : hàm số f(x) liên tục trên [a; b] và thỏa mãn $f(a+b-x)=-f(x)$ thì $\int_a^b f(x)dx=0$. Các bạn chứng minh bằng cách đặt $u=a+b-x$.

Ví dụ 3. Tính : $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

Giải

Dùng cách đặt ẩn phụ bằng tổng hai cận trừ cho biến.

Đặt $u=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-x=-x\Rightarrow dx=-du$

Đổi cận: $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow u=\frac{1}{2};\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow u=-\frac{1}{2}$

Ta có : $I=\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\cos(-u).\ln\left[\frac{1-(-u)}{1+(-u)}\right]d(-u)=-\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\cos u.\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)du$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos u.\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{-1}du=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos u.\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)du$$

Do tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên ta có

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos u.\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)du=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$$

Vậy ta có I = –I hay I = 0.

**** Nhận xét :***

– Bài toán này nếu giải theo lối thông thường thì chúng ta sẽ nghĩ tới phương pháp tích phân từng phần để tính. Thế nhưng, cách đó thật khó đem lại lời giải thỏa đáng !

– Ví dụ trên minh họa cho lớp tích phân sau: hàm số f(x) liên tục và là hàm lẻ trên đoạn [–a; a] thì $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$. Các bạn chứng minh bằng cách đặt u = a + (–a) – x.

Ví dụ 4. Tính : $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{e^x+1}dx$.

Giải

Dùng cách đặt ẩn phụ bằng tổng hai cận trừ cho biến.

Đặt $u=-1+1-x=-x\Rightarrow dx=-du$

Đổi cận : $x=-1\Rightarrow u=1;\ x=1\Rightarrow u=-1$

Ta có : $I=\int_{1}^{-1}\frac{(-u)^4}{e^{-u}+1}(-du)=\int_{-1}^{1}\frac{u^4}{\frac{1}{e^u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{e^u.u^4}{1+e^u}du$

Do tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên ta có

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^u.u^4}{1+e^u}du=\int_{-1}^{1}\frac{e^x.x^4}{e^x+1}dx$$

Vậy $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x.x^4}{e^x+1}dx\Rightarrow I+I=\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{e^x.x^4}{e^x+1}dx$

Suy ra $2I=\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{e^x.x^4}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(e^x+1)x^4}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}x^4dx=\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{5}$

Hay ta có $I=\frac{1}{2}.\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

**** Nhận xét :*** *Ví dụ trên minh họa cho lớp tích phân sau : hàm số f(x) liên tục và là hàm chẵn trên đoạn [–a; a] thì $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f(x)dx$. Các bạn chứng minh bằng cách đặt $u=a+(-a)-x$.*

Ví dụ 5. Tính : $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx$.

Giải

Dùng cách đặt ẩn phụ bằng tổng hai cận trừ cho biến.

Đặt $u=0+\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$ và $dx=-du$

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$

Ta có : $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}(-du)$

$$I=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^3 u}{\sin^3 u+\cos^3 u}du=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 u}{\sin^3 u+\cos^3 u}du$$

Do tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 u}{\sin^3 u+\cos^3 u}du=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=I$$

Vậy ta có :

$$I+I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

Suy ra $I=\frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 6. Tính : $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{7\sin x-5\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$.

Giải

Dùng cách đặt ẩn phụ bằng tổng hai cận trừ cho biến.

$$I=7\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)^3}-5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{(\sin x+\cos x)^3}=7I_1-5I_2$$

Trong đó $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)^3}$; $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{(\sin x+\cos x)^3}$.

Đặt $u=0+\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$ và $dx=-du$

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$

Ta có : $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)^3}=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)dt}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]^3}d(-u)$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u du}{(\sin u+\cos u)^3}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{(\sin x+\cos x)^3}=I_2.$$

(do tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân)

$$I_1+I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

Vậy ta có : $I_1=I_2=\frac{1}{2}\Rightarrow I=7I_1-5I_2=1$.

**** Nhận xét :*** *Ví dụ trên minh họa cho lớp tích phân sau : hàm số f(x) liên tục trên đoạn [0; 1] thì* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$. *Các bạn chứng minh bằng cách đặt* $u=0+\frac{\pi}{2}-x$.

Ví dụ 7. Tính : $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{4-\cos^2 x}dx$.

Giải

Dùng cách đặt ẩn phụ bằng tổng hai cận trừ cho biến.

Đặt $u=0+\pi-x=\pi-x\Rightarrow x=\pi-u$ và $dx=-du$

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=\pi$; $x=\pi\Rightarrow u=0$

Ta có : $I=\int\limits_{\pi}^0\frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{4-\cos^2(\pi-u)}(-du)=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-u)\sin u}{4-\cos^2 u}du$

Do tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên ta có

$$=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-u)\sin u}{4-\cos^2 u}du=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{4-\cos^2 x}dx=I$$

Vậy ta có :

$$I+I=2I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{4-\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{4-\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{4-\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{4-\cos^2 x}dx=-\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4-\cos^2 x}d(\cos x)=\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2 x-4}d(\cos x)$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{(\cos x-2)(\cos x+2)}d(\cos x)$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{(\cos x+2)-(\cos x-2)}{(\cos x-2)(\cos x+2)}d(\cos x)$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\cos x-2}-\frac{1}{\cos x+2}\right)d(\cos x)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\ln\left|\cos x-2\right|-\ln\left|\cos x+2\right|\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}\ln\left|\frac{\cos x-2}{\cos x+2}\right|\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi\ln 9}{4}.$$

Suy ra $I=\dfrac{\pi\ln 9}{8}$.

*** Nhận xét :** *Ví dụ trên minh họa cho lớp tích phân sau : hàm số f(x) liên tục trên đoạn* $[0;1]$ *thì* $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$. *Các bạn chứng minh bằng cách đặt u = 0 + π − x.*

BÀI TẬP

1. Tính : $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{xdx}{\sin x+1}$

2. Tính : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2014}x}{\sin^{2014}x+\cos^{2014}x}dx$

3. Tính : $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{4-\sin^2 x}dx$

4. Tính : $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx$

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG II

Bài 1. TÍCH PHÂN

1. Tính :

a) $I_1=\displaystyle\int_1^9 3x\sqrt{x}dx=\int_1^9 3x\sqrt{x}dx=\int_1^9 3x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^9=\frac{1452}{5}$

b) $I_2=\displaystyle\int_1^4\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_1^4 x^{\frac{-2}{3}}dx=3x^{\frac{1}{3}}\Big|_1^4=3$

c) $I_3=\displaystyle\int_2^4\sqrt{5x-3}dx=\int_2^4(5x-3)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{15}(5x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^4=\frac{2}{15}\left(17\sqrt{17}-7\sqrt{7}\right)$

d) $I_4=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{2}-x)dx=-\sin(\frac{\pi}{2}-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $I_5=\displaystyle\int_0^1 e^{3x+2}dx=\int_0^1 e^{3x+2}dx=\frac{1}{3}e^{3x+2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$

g) $I_6=\displaystyle\int_0^1 e^{2x}e^{3x+1}dx=\int_0^1 e^{2x}e^{3x+1}dx=\int_0^1 e^{5x+1}dx=\frac{1}{5}e^{5x+1}\Big|_0^1=\frac{1}{5}\left(e^6-e\right)$

2. Tính

a) $I_1=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(3\cos x-2\sin x\right)dx=\left(3\sin x+2\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=-4$

b) $I_2=\displaystyle\int_1^4\frac{\sqrt[3]{x^2}+xe^x}{x}dx=\int_1^4 x^{-\frac{1}{3}}dx+\int_1^4 e^x dx=\frac{3}{2}\left(2\sqrt{2}-1\right)+e^4-e$

Bài 2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

A. Phương pháp biến đổi

2. Tính :

a) $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+2e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+2}dx=\int_0^1\frac{1}{e^x+2}d(e^x+2)$

$$=\ln\left(e^x+2\right)\Big|_0^1=\ln\frac{e+2}{3}.$$

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1}dx = \int_0^1 (e^x-1)dx = e^x - x\Big|_0^1 = e-2$.

c) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \tan^2\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

d) $I_4 = \int_0^1 \frac{6x^2}{x^3+1}dx = \int_0^1 \frac{2}{x^3+1}d(x^3+1) = 2\ln\left|x^3+1\right|\Big|_0^1 = 2\ln 2$

2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\pi} \sin 2x.\sin^2 x dx = 2\int_0^{\pi} \cos x.\sin^3 x dx = 2\int_0^{\pi} \sin^3 x d(\sin x)$

$= \frac{\sin^4 x}{2}\Big|_0^{\pi} = 0$.

b) $I_2 = \int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+7\ln x}}{x}dx = \frac{1}{7}\int_0^1 (1+7\ln x)^{\frac{1}{3}} d(1+7\ln x)$

$= \frac{3}{28}(1+7\ln x)^{\frac{4}{3}}\Big|_1^e = \frac{45}{28}$

c) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2+x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2 = \ln\frac{4}{3}$

d) $I_4 = \int_0^1 \frac{1}{4x^2-9}dx = \int_0^1 \frac{1}{(2x-3)(2x+3)}dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\ln\frac{1}{5}$

B. Phương pháp đổi biến số

1. Tính : (CĐ – ĐH khối D – 2005) Dùng phương pháp đổi biến số hoặc giải như sau:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} + \cos x\right)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 dx$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e-1$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $I_1 = \frac{\pi}{4} + e - 1$.

2. Tính : $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$ (CĐ – ĐH khối D – 2011)

Đặt $u = \sqrt{2x+1}$. Đáp số $I = \frac{34}{3} + 10\ln\frac{3}{5}$

3. Tính : $I = \int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x.\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

Đặt $u = \sqrt{1+\ln x}$. Đáp số $I = \frac{1696}{105}$

4. Tính : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}dx$ (CĐ – ĐH khối A – 2006)

Đặt $u = \sqrt{\cos^2 x + 4\sin^4 x}$. Đáp số $I = \frac{2}{3}$.

5. Tính : $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$

Đặt $x = \tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = (\tan^2 x + 1)dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t + 1}{1 + \tan^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$. Vậy $\mathrm{I} = \frac{\pi}{4}$.

6. Tính : $\mathrm{I} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Đặt u = 2sinx; ĐS: $\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}$.

C. Phương pháp tính tích phân từng phần

1. Tính :

a) $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1+\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

b) $I_2 = \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx$. Đặt $u = \sqrt{x}$. ĐS $I_2 = 2\pi$

c) $I_3 = \int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xde^{2x} = \frac{1}{2}\left(xe^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx \right) = \frac{1}{4}e^2 + 1$

d) $I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \ln x d\left(\frac{-1}{x}\right) = \ln x.\left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^1 x2^x dx = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 xd2^x = \frac{1}{\ln 2}\left(x2^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2^x dx \right)$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(x2^x - \frac{2^x}{\ln 2} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}\left(2 - \frac{1}{\ln 2} \right).$$

b) $I_1 = \int_1^3 x.\log_3 xdx = \int_1^3 x.\log_3 e.\log_e xdx = \log_3 e.\int_1^3 x.\ln xdx = \frac{9}{2}\ln 3 - 1$.

c) $\int_1^2 (2x+1)\ln(x^2+x+2)dx$

Đặt $u = x^2 + x + 2$. *Đáp số* $I = \frac{8863}{1250}$.

d). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1+\sin x)dx$.

Đặt $u = \sin x + 1$. *Đáp số* $I = 2\ln 2 - 1$.

Bài 3. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

1. Tính :

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 7x + 12}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-3)(x-4)}dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} \right)dx = \ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|\Big|_0^1 = \ln\frac{9}{8}$$

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{x-2}{3x+1}dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{3}(3x+1) - \frac{1}{3} - 2}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{7}{3}\ln 4\right)$

2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Đặt x + 1 = tant; ĐS: $I = \frac{\pi}{12}$.

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$

Cách 1:

$$\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow 4x+11 = A(x+3) + B(x+2)$$

Thay x = -2 thì A = 3; thay x = -3 thì B = 1

Vậy: $I_2 = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right)dx = \left(3\ln|x+2| + \ln|x+3|\right)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$

Cách 2:

$$\frac{2(2x+5)+1}{x^2+5x+6} = 2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right)dx = \left(2\ln|x^2+5x+6| + \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| \right)\Big|_0^1$$

$$= 2\ln 3 - \ln 2.$$

3. Tính :

a) $I_2 = \int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9}{(x^5+1)^3}dx$. Đặt $u = x^5 + 1$; *ĐS:* $\frac{2}{45}$

b) $I_2 = \int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}dx$

Cách 1:

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)(x+2)}$$

$$\Rightarrow x^2 = A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C\left(x^2-1\right)$$

Thay lần lần lượt các nghiệm của mẫu vào, ta có:

Thay $x=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$;

Thay $x=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$;

Thay $x=-2 \Rightarrow C=-\frac{5}{4}$

$$I=\int_2^3 \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)(x+2)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{5}{4}\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{5}{4}\ln|x+2|\right]\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Cách 2:

$$\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)(x+2)}=\frac{x^2-1+1}{\left(x^2-1\right)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{x(x+1)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$$

Từ đó ta có đáp số cần tìm.

Bài 4. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

1. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\tan x+1)^3}.\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đặt $t=\tan x+1$; ĐS: $I=\frac{3}{8}$.

2. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x.\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos x dx$.

$t=\sin x$; *ĐS:* $I=\frac{8}{15}$.

3. Tính : $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x+\sin x\cos x}{2+\sin x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x(2+\sin x)-\cos x}{2+\sin x}dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\cos x-\frac{\cos x}{2+\sin x}\right)dx=\int_0^{\pi/2}\cos x dx-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$$

Đặt $u=2+\sin x$; *ĐS:* $I=1+\ln\frac{2}{3}$.

4. Tính : $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$. Đặt $u=\sqrt{1+3\cos x}$; ĐS: $I=\frac{34}{27}$.

Bài 5. TÍCH PHÂN HÀM CHỨA CĂN THỨC

1. Tính :

a) $I_1=\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. Đặt $u=\sqrt{x}+1$ hoặc $u=\sqrt{x}$; ĐS: $I_1=7+2\ln 2$.

b) $I_2=\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$. Đặt $u=\sqrt{x+1}$; ĐS: $I_2=\frac{76}{15}$.

2. Tính :

a) $I_1=\int_4^{12}\frac{1}{x\sqrt{2x+1}}dx$. Đặt $u=\sqrt{2x+1}$; ĐS: $I_1=\frac{4}{3}$.

b) $I_2=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

Vì : $3+2x-x^2=4-(x-1)^2$. Cho nên:

Đặt: $x-1=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sin t=\frac{x-1}{2}; dx=2\cos t dt$

$$x=1\Rightarrow\sin t=\frac{1-1}{2}=0\Rightarrow t=0;\ x=2\Rightarrow\sin t=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}}2\cos t dt=dt$$

Vậy $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$.

Bài 6. TÍCH PHÂN HÀM MŨ VÀ LÔGARIT

1. Tính :

a) $I_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$

Đặt $u = \ln x$; $dv = \frac{1}{x^5}dx$; *ĐS:* $I_1 = \frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$.

b) $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$. Đặt $u = \ln x$; $dv = \frac{1}{(x+1)^2}dx$; *ĐS:* $I_2 = 0$.

2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.e^{\sin x}dx$. Đặt $t = \sin x$; *ĐS:* $I_1 = 2$.

b) $I_2 = \int_1^e (x\ln x)^2 dx = \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$

Đặt $u = \ln^2 x$; $dv = x^2dx$; *ĐS:* $I_2 = \frac{5e^3 - 2}{27}$.

Bài 7. TÍCH PHÂN HÀM CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Tính :

a) $I_1 = \int_0^3 \left|x^2 - 5x + 6\right|dx$. *ĐS:* $I_1 = \frac{187}{6}$.

b) $I_2 = \int_0^3 \left|x^2 - 4\right|dx$. *ĐS:* $I_2 = 4 + \frac{1}{\ln 2}$.

2. Tính :

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}\,dx$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}dx = \int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right|dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|dx + \sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx - \sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx$$

ĐS : $I_1 = 4\sqrt{2}$.

b) $I_2 = \int_0^{\pi}\left|\cos x\right|\sin x dx$.

Bài 8. MỘT SỐ LỚP TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

1. Tính : $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{x}\mathrm{dx}}{\sin \mathrm{x} + 1}$

Đặt $\mathrm{x} = \pi - \mathrm{u} \Rightarrow \mathrm{dx} = -\mathrm{du}$; $\mathrm{x} = 0 \Rightarrow \mathrm{u} = \pi$; $\mathrm{x} = \pi \Rightarrow \mathrm{u} = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - \mathrm{u})\mathrm{du}}{\sin(\pi - \mathrm{u}) + 1} = \int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{\sin \mathrm{u} + 1} - \frac{\mathrm{u}}{\sin \mathrm{u} + 1}\right)\mathrm{du}$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{du}}{\sin \mathrm{u} + 1} - \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{du}}{\sin \mathrm{u} + 1}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{du}}{\left(\sin\frac{\mathrm{u}}{2} + \cos\frac{\mathrm{u}}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{du}}{\cos^2\left(\frac{\mathrm{u}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{u}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\mathrm{u}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\mathrm{u}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Vậy $\mathrm{I} = \pi$.

2. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x} dx$

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$; $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

$$\Rightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^{2014}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\sin^{2014}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \cos^{2014}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2014} u}{\sin^{2014} u + \cos^{2014} u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x} dx = J \quad (1).$$

Mà $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{\pi}{4}$.

3. Tính : $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{4 - \sin^2 x} dx$

Đặt $x = -u \Rightarrow dx = -du$; $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = -\frac{\pi}{2}$

Ta có $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{-u}{4 - \sin^2 u} du = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{4 - \sin^2 u} du = -I.$

Suy ra $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{4 - \sin^2 x} dx = 0.$

4. Tính : $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2^x + 1} dx$; Đặt $x = -u$;

ĐS: $I = 0$.

Chương 3. MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI TÍNH TÍCH PHÂN VÀ BIỆN PHÁP KHẮC PHỤC

Phần này chúng ta xem xét một số sai lầm thường gặp khi tính tích phân. Nhằm củng cố kiến thức, cũng như để tránh những sai sót khiến dẫn đến lời giải sai cho bài toán tích phân. Sau mỗi sai sót, ta rút ra kinh nghiệm cũng như cách khắc phục những lỗi đó. Chúng ta xét các ví dụ sau đây :

Ví dụ 1. Tính : $I = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2 + 1} dx$.

Giải

Lời giải sai :

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow udu = xdx$.

Ta suy ra $I = \int_0^{\sqrt{3}} u.udu = \int_0^{\sqrt{3}} u^2 du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Nhận xét :

– Sai lầm : dùng phương pháp đổi biến số mà không đổi cận !

– Đây là sai lầm thường thấy đối với học sinh mới làm quen với phương pháp đổi biến số để tính tích phân. Một số học sinh có tính vội vàng, không cẩn thận cũng dễ mắc phải sai lầm này !

– **Khắc phục :** khi tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số, các bạn hãy luôn định hình trong suy nghĩ ba bước chính là :

"Đặt – Đổi cận – Tính".

Lời giải đúng :

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow udu = xdx$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow u = 2$.

Ta suy ra $I = \int_1^2 u.udu = \int_1^2 u^2 du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$.

Ví dụ 2. Tính : $I = \int\limits_0^1 x\left(2x+3\right)^5 dx$.

Giải

Lời giải sai :

Đặt $u = 2x + 3$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 3;\ x = 1 \Rightarrow u = 5$

$$\text{Ta có } I = \int\limits_3^5 \frac{u-3}{2} u^5 du = \frac{1}{2}\int\limits_3^5 \left(u-3\right)u^5 du = \frac{1}{2}\int\limits_3^5 \left(u^6 - 3u^5\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^7}{7} - 3\frac{u^6}{6}\right)\Bigg|_3^5 = \frac{11901}{7}.$$

Nhận xét :

– Sai lầm : dùng phương pháp đổi biến số mà không tính vi phân !

– Đây cũng là một sai lầm đối với học sinh mới làm quen với phương pháp đổi biến số để tính tích phân. Các bạn chú ý rằng : nếu không tính vi phân "du" (mục đích là xác định "dx") thì chúng ta chưa chuyển hoàn toàn được tích phân theo biến x về tích phân theo biến u.

– **Khắc phục :** chúng ta nhớ rằng, khi tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số, chúng ta cần biểu diễn hoàn toàn tích phân theo biến x về biến ẩn phụ.

Lời giải đúng :

Đặt u = 2x + 3 ⇒ du = 2dx hay $dx = \frac{1}{2}du$

Đổi cận : x = 0 ⇒ u = 3; x = 1 ⇒ u = 5

$$\text{Ta có } I = \int\limits_3^5 \frac{u-3}{2}.u^5.\frac{1}{2}du = \frac{1}{4}\int\limits_3^5 \left(u-3\right)u^5 du = \frac{1}{4}\int\limits_3^5 \left(u^6 - 3u^5\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^7}{7} - 3\frac{u^6}{6}\right)\Bigg|_3^5 = \frac{11901}{14}.$$

Ví dụ 3. Tính : $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos x - \sin x\right) dx$.

Giải

Lời giải sai :

$$\text{Ta có } I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos x - \sin x\right) dx = \left(-2\sin x - \cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$$

Nhận xét :

– Sai lầm : nhớ không đúng công thức nguyên hàm cơ bản ! Hiểu nhầm công thức nguyên hàm theo công thức đạo hàm. Cần lưu ý các công thức dễ nhầm với nhau:

$$\int \cos x dx = \sin x + C \text{ và } \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \text{ và } \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

– **Khắc phục :** nếu cẩn thận hay nghi ngờ về tính chính xác của công thức, chúng ta lấy đạo hàm của nguyên hàm để kiểm tra công thức nguyên hàm.

Lời giải đúng :

$$\text{Ta có: } I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos x - \sin x\right) dx = \left(2\sin x + \cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Ví dụ 4. Tính : $I = \int\limits_2^3 \frac{1}{1-x^2} dx$.

Giải

Lời giải sai :

$$\text{Ta có : } I = \int\limits_2^3 \frac{1}{1-x^2} dx = \int\limits_2^3 \frac{1}{\left(1-x\right)\left(1+x\right)} dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{\left(1-x\right)+\left(1+x\right)}{\left(1-x\right)\left(1+x\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln\left|1-x\right| + \ln\left|1+x\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}.$$

Nhận xét :

– Sai lầm : tính nhanh ở bước biến đổi

$$\frac{1}{2}\int_2^3\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln\left|1-x\right|+\ln\left|1+x\right|\right)$$

bằng cách sử dụng bảng nguyên hàm mở rộng nhưng không để ý đến hệ số a = –1 trong công thức $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right|+C$. Đúng ra phải là $\int\frac{1}{1-x}dx=\frac{1}{-1}\ln\left|1-x\right|+C=-\ln\left|1-x\right|+C$. Dó đó, khi sử dụng công thức nguyên hàm mở rộng, các bạn cần lưu ý ở "hệ số a"!

– Khắc phục : để chắc chắn rằng, phép biến đổi dựa trên công thức nguyên hàm của mình là đúng, chúng ta lấy đạo hàm ngược lại kiểm tra công thức nguyên hàm.

Lời giải đúng :

Ta có: $I=\int_2^3\frac{1}{1-x^2}dx=\int_2^3\frac{1}{(1-x)(1+x)}dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_2^3\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\ln\left|1-x\right|+\ln\left|1+x\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}.$$

Ví dụ 5. Tính : $I=\int_0^1(x+1)e^x dx$.

Giải

Lời giải sai :

Đặt $u=x+1\Rightarrow u'=1;\ v'=e^x\Rightarrow v=e^x$.

$$I=\int_0^1(x+1)e^x dx=(x+1)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx$$

$$=(x+1)e^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=e.$$

Nhận xét :

– Sai lầm : Trong công thức tính tích phân từng phần, không đồng nhất vi phân với đạo hàm!

– Khắc phục : Công thức tính tích phân từng phần là: $\boxed{\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu}$. Nên áp dụng công thức này, ta cần xác định "u", "v", "du". Không phải là xác định " u' ", " v' " ?

Lời giải đúng :

Đặt $u=x+1\Rightarrow du=dx\,;\ dv=e^x dx\Rightarrow v=e^x$.

$$I=\int_0^1(x+1)e^x dx=(x+1)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx$$

$$=(x+1)e^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=e.$$

Ví dụ 6. Tính : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx$.

Giải

Lời giải sai :

Đặt $u=x\Rightarrow du=dx\,;\ dv=\sin x dx\Rightarrow v=-\cos x$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$$

$$=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\ \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-1.$$

Nhận xét :

– Sai lầm : Do không để ý tới dấu "–" trong công thức tính tích phân từng phần $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$ mà áp dụng sai công thức.

– **Khắc phục** : lưu ý tới dấu "–" trong công thức tích phân từng phần; kiểm tra dấu của "vdu".

Lời giải đúng :

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Ví dụ 7. Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx$.

Giải

Lời giải sai :

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$= \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\tan\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}}\right) - \left(\tan 0 - \frac{1}{\cos 0}\right)?$$

Ta nhận thấy không tính được I? Vậy sai lầm ở đâu?

Nhận xét :

– Sai lầm : dùng phép nhân liên hợp mà không để ý điều kiện của biến x là $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, khi đó $1-\sin x = 0$ tại $x = \frac{\pi}{2}$. Vậy biến đổi sau đây là không đúng $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$.

– Đây là một sai lầm khó nhận ra! Các biến đổi cứ ngỡ hoàn toàn đúng!

– **Khắc phục** : khi tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ cần lưu ý tính liên tục của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Lời giải đúng :

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Vậy $I = 1$.

Ví dụ 8. Tính : $I = \int_0^1 \sqrt{4x^2 - 4x + 1}dx$.

Giải

Lời giải sai :

Ta có $I = \int_0^1 \sqrt{4x^2 - 4x + 1}dx = \int_0^1 \sqrt{(2x-1)^2}dx$

$$= \int_0^1 (2x-1)dx = \left(x^2 - x\right)\Big|_0^1 = 0.$$

Nhận xét :

– Sai lầm: Với $x \in \left[0;1\right]$ thì phép biến đổi $\sqrt{\left(2x-1\right)^2} = 2x-1$ là không đúng.

– Khắc phục : Các bạn lưu ý công thức biến đổi :

$$\sqrt{a^2} = \left|a\right| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \ge 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$$

Lời giải đúng :

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{4x^2-4x+1}dx = \int_0^1 \sqrt{\left(2x-1\right)^2}dx$

$$= \int_0^1 \left|2x-1\right|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|2x-1\right|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|2x-1\right|dx$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x-1\right)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2x-1\right)dx$$

$$= -\left(x^2-x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \left(x^2-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Trên đây chỉ là một số sai lầm thường thấy khi tính tích phân. Nghiên cứu những sai lầm sẽ giúp chúng ta có thêm kinh nghiệm, hạn chế những sai sót. Ngoài ra, để xác minh kết quả lời giải cho bài toán tích phân của mình là đúng hay sai, các bạn có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính, kiểm tra lại đáp số. Lưu ý trường hợp mà kết quả giải đúng như tính bằng máy tính nhưng lời giải lại không đúng (như trong ví dụ 5).

Chương 4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

Bài 1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

* Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng x = a, x = b (a < b) và đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ là :

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx}.$$

– Ta tính diện tích S theo cách sau :

Bước 1: Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$.

Bước 2: chọn nghiệm thuộc đoạn $\left[a;b\right]$. Giả sử trên đoạn $\left[a;b\right]$ phương trình $f(x)-g(x)=0$ có các nghiệm là $c\,;d\ (c<d)$.

Bước 3: Khi đó ta tính S theo công thức

$$\int_a^c \left|f(x)-g(x)\right|dx + \int_c^d \left|f(x)-g(x)\right|dx + \int_d^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$$

$$= \left|\int_a^c f(x)-g(x)dx\right| + \left|\int_c^d f(x)-g(x)dx\right| + \left|\int_d^b f(x)-g(x)dx\right|$$

**** Chú ý :***

– Diện tích S luôn là giá trị dương.

– Ta có $\displaystyle\int_a^c \left|f(x)-g(x)\right|dx = \left|\int_a^c f(x)-g(x)dx\right|$ *vì trên đoạn* $\left[a;c\right]$ *hiệu* $f(x)-g(x)$ *chỉ giữ dấu âm hoặc dương. Mà diện tích phải dương nên ta có biến đổi trên.*

– Tích phân không có tính chất $\displaystyle\int_a^c \left|f(x)-g(x)\right|dx = \left|\int_a^c f(x)-g(x)dx\right|$.

– Ở trên, khi tính diện tích ta đã coi x là biến, y là hàm. Tuy nhiên, trong một số trường hợp ta coi y là biến của hàm x, khi đó việc tính diện tích sẽ dễ hơn.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) : $y = x^2-2x-3$, trục Ox và đường thẳng $x=1, x=4$.

Giải

Trục Ox có phương trình $y=0$. Diện tích S là

$$S=\int_1^4\left|x^2-2x-3-0\right|dx=\int_1^4\left|x^2-2x-3\right|dx$$

Ta có $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[1;4] \\ x=3\in[1;4]\end{array}\right.$.

Suy ra $S=\int_1^4\left|x^2-2x-3\right|dx=\int_1^3\left|x^2-2x-3\right|dx+\int_3^4\left|x^2-2x-3\right|dx$

$$=\left|\int_1^3\left(x^2-2x-3\right)dx\right|+\left|\int_3^4\left(x^2-2x-3\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_1^3\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_3^4\right|=\frac{23}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) :

$$y=|\ln x|,\ y=1.$$

Giải

Ta có $|\ln x|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\ln x=1\\ \ln x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\ln x=-1\\ \ln x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=e\\ x\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{e}\\ 0<x<1\end{cases}\end{array}\right.$

Gọi diện tích cần tính là S.

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left||\ln x|-1\right|dx=\left|\int_{\frac{1}{e}}^{1}(|\ln x|-1)dx\right|+\left|\int_1^e(|\ln x|-1)dx\right|$$

$$=\left|\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x-1)dx\right|+\left|\int_1^e(\ln x-1)dx\right|=\left|\int_{\frac{1}{e}}^{1}(\ln x+1)dx\right|+\left|\int_1^e(\ln x-1)dx\right|$$

$$=\left|\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx+\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx\right|+\left|\int_1^e\ln x dx-\int_1^e dx\right|$$

$$=\left|x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx+\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx\right|+\left|x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx-\int_1^e dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{e}\right|+|2-e|=\frac{1}{e}+e-2.$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y=(e+1)x,\ y=(1+e^x)x.\ \text{(CĐ - ĐH khối A – 2007)}$$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là

$$(e+1)x=(1+e^x)x \Leftrightarrow x(e^x-e)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ e^x-e=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^1\left|xe^x-ex\right|dx=\left|\int_0^1 xe^x dx-e\int_0^1 xdx\right|=\left|\int_0^1 xde^x-e\int_0^1 xdx\right|$$

$$=\left|xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx-e\int_0^1 xdx\right|=\left|xe^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1-\frac{ex^2}{2}\Big|_0^1\right|=\frac{e}{2}-1$$

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y^2=2x+1,\ y=x-1.$$

Giải

Ta có $y^2=2x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-1}{2}$; $y=x-1 \Leftrightarrow x=y+1$.

Phương trình tung độ giao điểm của hai đường đã cho là:

$$\frac{y^2-1}{2}-(y+1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(y^2-2y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=3\end{array}\right.$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là:

$$S=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\left|y^2-2y-3\right|dy=\left|\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\left(y^2-2y-3\right)dy\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}-y^2-3y\right)\Bigg|_{-1}^{3}\right|=\frac{16}{3}.$$

Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y=\left|x^2-4x+3\right|,\ y=x+3.\ \text{(CĐ – ĐH khối A – 2002)}$$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=\left|x^2-4x+3\right|$ và $y=x+3$

là $\left|x^2-4x+3\right|=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=x+3 \\ x^2-4x+3=-x-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-5x=0 \\ x^2-3x+6=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^5\left|\left|x^2-4x+3\right|-(x+3)\right|dx=\left|\int_0^5\left[\left|x^2-4x+3\right|-(x+3)\right]dx\right|$$

Ta xét dấu của tam thức bậc hai x^2-4x+3.

x	0		1		3		5
x^2-4x+3		+	0	−	0	+	

Từ đó ta có :

$$S=\left|\int_0^1\left(x^2-5x\right)dx\right|+\left|\int_1^3\left(-x^2+3x-6\right)dx\right|+\left|\int_3^5\left(x^2-5x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1\right|+\left|\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_1^3\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_3^5\right|=\frac{109}{6}.$$

Bài 2. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

* Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính bởi công thức : $\boxed{V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$.

* Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính bởi công thức : $\boxed{V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx}$.

Ví dụ 1. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành. (TN THPT lần 2 – 2007)

Giải

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Ví dụ 2. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$.

Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox. (CĐ - ĐH khối B – 2007)

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=x\ln x$ và $y=0$ là $x\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ (vì $x>0$).

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có: $V=\pi\int_1^e(x\ln x)^2dx=\pi\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx$.

Đặt $u=\ln^2 x \Rightarrow du=2\ln x.\frac{1}{x}dx$; $dv=x^2dx \Rightarrow v=\frac{x^3}{3}$.

Ta được $V=\pi\left(\frac{x^3}{3}\ln^2 x\Bigg|_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\frac{2\ln x}{x}dx\right)=\pi\left(\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx\right)$

Xét $J=\int_1^e x^2\ln x\,dx$.

Đặt $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$; $dv=x^2dx \Rightarrow v=\frac{x^3}{3}$.

Ta được $J=\frac{x^3}{3}\ln x\Bigg|_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Bigg|_1^e=\frac{2e^3+1}{9}$.

Suy ra $V=\pi\left(\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}.\frac{2e^3+1}{9}\right)=\frac{\pi\left(5e^3-2\right)}{27}$.

Ví dụ 3. Tính thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=-y^2+5$, $x=3-y$ quay quanh Oy.

Giải

Phương trình tung độ giao điểm của các đường $x=-y^2+5$ và $x=3-y$ là

$$-y^2+5=3-y \Leftrightarrow y^2-y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=2 \end{array}\right.$$

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có:

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left|\left(-y^2+5\right)^2-(3-y)^2\right|dy=\pi\left|\int_{-1}^{2}\left(y^4-11y^2+6y+16\right)dy\right|$$

$$=\pi\left|\left(\frac{y^5}{5}-\frac{11y^3}{3}+3y^2+16y\right)\Bigg|_{-1}^{2}\right|=\frac{153\pi}{5}.$$

Ví dụ 4. Tính thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y^2=x$ quay quanh Ox.

Giải

Xác định hoành độ giao điểm của các đường $y=x^2$ và $y^2=x$, ta giải hệ:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x^4=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x(x^3-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có:

$$V=\pi\int_0^1\left|x^4-x\right|dx=\pi\left|\int_0^1\left(x^4-x\right)dx\right|=\pi\left|\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1\right|=\frac{3\pi}{10}.$$

Bài 3. ỨNG DỤNG KHÁC CỦA TÍCH PHÂN

a) Tích phân trong bài toán đại số tổ hợp

Ví dụ 1. Cho n là số nguyên dương. Tính tổng :

$$C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

(CĐ - ĐH khối B – 2003)

Giải

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$$

Suy ra : $\displaystyle\int_1^2(1+x)^n\,dx=\int_1^2\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_1^2=\left(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}+\ldots+C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}=C_n^0+C_n^1\frac{2^2-1}{2}+C_n^2\frac{2^3-1}{3}+\ldots+C_n^n\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Vậy ta có : $\displaystyle C_n^0+C_n^1\frac{2^2-1}{2}+C_n^2\frac{2^3-1}{3}+\ldots+C_n^n\frac{2^{n+1}-1}{n+1}=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

Ví dụ 2. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng :

$$2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+\ldots+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$$

Giải

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton ta có :

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$$

Suy ra : $\displaystyle\int_0^2(1+x)^n\,dx=\int_0^2\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^2=\left(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}+\ldots+C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0+C_n^1\frac{2^2}{2}+C_n^2\frac{2^3}{3}+\ldots+C_n^n\frac{2^{n+1}}{n+1}$$

Vậy ta có : $\displaystyle C_n^0+C_n^1\frac{2^2}{2}+C_n^2\frac{2^3}{3}+\ldots+C_n^n\frac{2^{n+1}}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$ (đpcm)

Ví dụ 3. Cho khai triển : $(x-2)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ldots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}$

Tính tổng sau : $\displaystyle S=a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{4}a_3\ldots+\frac{1}{100}a_{99}+\frac{1}{101}a_{100}$

Giải

Ta có : $(x-2)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ldots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}$

Suy ra : $\displaystyle\int_0^1(x-2)^{100}dx=\int_0^1\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^{101}}{101}\bigg|_0^1 = \left(a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + ... + a_{99}\frac{x^{100}}{100} + a_{100}\frac{x^{101}}{101}\right)\bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{101}-1}{101} = a_0 + a_1\frac{1}{2} + ... + a_{99}\frac{1}{100} + a_{100}\frac{1}{101}$$

Vậy ta có: $S = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + ... + \frac{1}{100}a_{99} + \frac{1}{101}a_{100} = \frac{2^{101}-1}{101}$.

b) Tích phân trong các bài toán tính giới hạn, bất đẳng thức, ...

Ví dụ 1. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ với $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{n+n}$.

Giải

Ta có : $S_n = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} + \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} + ... + \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n}}$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + ... + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Với $f(x) = \frac{1}{1+x}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$, nên nó khả tích trên đoạn $[0;1]$. Ta chia đoạn $[0;1]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau, mỗi đoạn bằng $\frac{1}{n}$, giới hạn bởi (n+1) điểm chia :

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < ...x_i = \frac{i}{n} < ... < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

Chọn $\zeta_i = x_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}; x_i]$, nên ta có $f(\zeta_i) = \dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}$ và

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\zeta_i)$. Do đó : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 f(x)dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$.

**** Chú ý :*** *Để tính giới hạn của một tổng nhờ tích phân xác định, ta thường tiến hành theo các bước như sau :*

– Biến đổi tổng dưới dấu giới hạn về biểu thức dạng

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

– Chọn được hàm $f(x)$ *khả tích trong* $[a;b]$.

– Tính tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$. *Kết quả của tích phân là giới hạn cần tìm.*

Ví dụ 2. Tính $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.

Giải

Ta đặt : $P_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right)}$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

Lấy Lôgarit hai vế ta thu được

$$\ln P_n = \frac{1}{n}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Với $f(x) = \ln(1+x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$, nên nó khả tích trên đoạn $[0;1]$. Đặt $S_n = \ln P_n$. Ta chia đoạn $[0;1]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau và bằng $\frac{1}{n}$, giới hạn bởi (n+1) điểm chia:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < ...x_i = \frac{i}{n} < ... < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

Chọn $\zeta_i = x_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}; x_i]$. nên ta có $f(\zeta_i) = \ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$ và

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\zeta_i)$. Do đó : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 f(x)dx$

$$= \int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$

$$= x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx\right)$$

$$= x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \left(x\Big|_0^1 - \ln|x+1|\Big|_0^1\right)$$

$$= \ln 2 - (1 - \ln 2) = 2\ln 2 - 1.$$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln P_n) = 2\ln 2 - 1$ nên $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^{2\ln 2 - 1}$.

Ví dụ 3. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < b$. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

Giải

Với mọi $x \in (a;b)$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{x} > \frac{1}{b}$, nên ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a}\int_a^b dx > \int_a^b \frac{dx}{x} > \frac{1}{b}\int_a^b dx \text{, hay ta có}$$

$$\frac{1}{a}x\Big|_a^b > \ln|x|\Big|_a^b > \frac{1}{b}x\Big|_a^b \Leftrightarrow \frac{1}{a}(b-a) > \ln|b| - \ln|a| > \frac{1}{b}(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{a} > \ln\frac{b}{a} > \frac{b-a}{b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \text{ (đpcm)}$$

**** Chú ý :** Khi sử dụng Tích phân trong các bài toán bất đẳng thức, chúng ta thường sử dụng các tính chất sau :*

– Nếu $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

– Nếu $f(x) \ge g(x)$ với mọi $x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

– Nếu $M \ge f(x) \ge m$ với mọi $x \in [a;b]$ thì

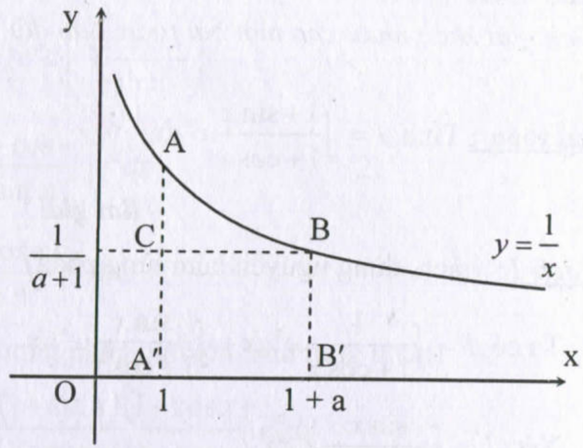
$$M(b-a) \ge \int_a^b f(x)dx \ge m(b-a).$$

(với $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$)

Ví dụ 4. Chứng minh rằng : $\ln(1+a) > \frac{a}{1+a}, \forall a \in (0;+\infty)$.

Giải

Xét $\ln(1+a)$ với $a \in (0;+\infty)$. Theo ý nghĩa hình học của tích phân thì $\ln(1+a) = \int_1^{1+a} \frac{1}{x}dx$ chính là diện tích của hình thang cong S_1 giới hạn bởi các đường $x = 1; x = 1+a; y = 0; y = \frac{1}{x}$.



Gọi S_2 là diện tích của hình chữ nhật BCA'B' thì $S_1 > S_2$, tức là :

$$\ln(1+a) > [(1+a) - 1].\frac{1}{a+1} \text{ hay } \ln(1+a) > \frac{a}{a+1},\ \forall a \in (0;+\infty). \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 5. Xác định giá trị của m để phương trình sau có nghiệm thực trong khoảng $(0;1)$: $12x^3 + 12mx^2 - 8mx - 3 = 0, x \in \mathbb{R}$.

Giải

Đặt $f(x) = 12x^3 + 12mx^2 - 8mx - 3 = 0, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = -3, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nên nếu phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(0;1)$ thì $f(x) < 0$ với mọi x trong khoảng $(0;1)$. Do đó, theo tính chất của tích phân ta có: $\int_0^1 f(x)dx < 0$. (*)

Mà $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (12x^3 + 12mx^2 - 8mx - 3)dx$

$$= (3x^4 + 4mx^3 - 4mx^2 - 3x)\Big|_0^1 = 0 \text{ (mâu thuẫn với (*))}$$

Điều đó chứng tỏ rằng: phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;1)$ với mọi giá trị thực của m.

Kết luận: $m \in \mathbb{R}$.

PHỤ LỤC. BÀI TOÁN CÓ NHIỀU CÁCH GIẢI

Tiếp cận lời giải của một bài toán, chúng ta có những cách nhìn, quan niệm khác nhau. Nhờ việc thay đổi cách nhìn và quan niệm đó, chúng ta có những cách giải khác nhau cho một bài toán. Sau đây là một bài toán như vậy !

Bài toán : Tính $I = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx$

Bài giải

Cách 1: (tách, dùng nguyên hàm từng phần)

Ta có $I = \int \frac{1}{1+\cos x}.e^x dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x dx$ (1)

Xét $J = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x dx$.

Đặt $u = \frac{\sin x}{1+\cos x} \Rightarrow du = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} dx = \frac{dx}{1+\cos x}$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \Rightarrow J = \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x - \int \frac{e^x}{1+\cos x} dx$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $I = \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x + C$.

Cách 2: (phương pháp biến đổi, phương pháp nguyên hàm từng phần)

Ta có $I = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx = \int \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}.e^x dx$

$= \int \frac{1-\cos x + \sin x - \sin x \cos x}{1-\cos^2 x}.e^x dx$

$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}.e^x dx + \int \frac{\sin x - \sin x \cos x}{1-\cos^2 x}.e^x dx$

$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}.e^x dx + \int \frac{1-\cos x}{\sin x}.e^x dx$ (1)

Xét $J = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}.e^x dx = \int \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x}.e^x dx$

$= \int \frac{(1-\cos x)' \sin x - (\sin x)' (1-\cos x)}{\sin^2 x}.e^x dx$

$= \int \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)'.e^x dx = \int e^x d\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$

$= e^x\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) - \int \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) e^x dx$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $I = \frac{1-\cos x}{\sin x}.e^x + C$.

Cách 3: (phương pháp tách, phương pháp nguyên hàm từng phần)

Ta có $I = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx = \int \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}.e^x dx$

$= \int \frac{1-\cos x + \sin x - \sin x \cos x}{1-\cos^2 x}.e^x dx$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x}.e^x dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}.e^x dx + \int \frac{1}{\sin x}.e^x dx - \int \frac{\cos x}{\sin x}.e^x dx$

Đặt $I_1 = \int \frac{1}{\sin^2 x}.e^x dx$; $I_2 = \int \frac{cox}{\sin^2 x}.e^x dx$; $I_3 = \int \frac{1}{\sin x}.e^x dx$;

$I_4 = \int \frac{\cos x}{\sin x}.e^x dx$.

Ta có: $I_1 = \int \frac{1}{\sin^2 x}.e^x dx = -\int e^x d(\cot x) = -e^x \cot x + \int \cot x.e^x dx$

$= -e^x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}.e^x dx = -e^x \cot x + I_4$.

$\Rightarrow I_1 - I_4 = -e^x \cot x$.

$I_3 = \int \frac{1}{\sin x}.e^x dx = \int \frac{1}{\sin x} d(e^x) = \frac{e^x}{\sin x} - \int e^x d\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

$= \frac{e^x}{\sin x} + \int \frac{e^x.\cos x}{\sin^2 x} dx = \frac{e^x}{\sin x} + I_2$.

$\Rightarrow I_3 - I_2 = \frac{e^x}{\sin x}$.

Vậy ta có: $I = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = (I_1 - I_4) + (I_3 - I_2)$

$$= -e^x \cot x + \frac{e^x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}.e^x$$

Suy ra $I = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}.e^x + C$.

* **Chú ý:** Kết quả ở cách 4 và cách trước đều đúng!

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}.e^x = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}.e^x = \frac{(1-\cos^2 x)}{\sin x(1+\cos x)}.e^x$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}.e^x = \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x$$

Cách 4: (phương pháp biến đổi, phương pháp nguyên hàm từng phần)

Ta có $I = \displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx = \int \frac{1+\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}.e^x dx$

$$= \int \frac{\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} + 1}{2}.e^x dx = \frac{1}{2}\int\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)e^x dx + \int \tan\frac{x}{2}.e^x dx$$

$$= \int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \int \tan\frac{x}{2} d\left(e^x\right)$$

$$= e^x.\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2} d\left(e^x\right) + \int \tan\frac{x}{2} d\left(e^x\right).$$

Suy ra $I = e^x.\tan\dfrac{x}{2} + C$.

Cách 5: (phương pháp biến đổi, phương pháp nguyên hàm từng phần)

Ta có : $I = \displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx = \int \frac{1}{1+\cos x}.e^x dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x dx \qquad (1)$

Xét nguyên hàm $J = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}.e^x dx = \int \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}.e^x dx$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x}{(1+\cos x)^2}.e^x dx$$

$$= \int \frac{\cos x(\cos x + 1) + \sin x.\sin x}{(1+\cos x)^2}.e^x dx$$

$$= \int \frac{(\sin x)'(\cos x + 1) - (\cos x + 1)'.\sin x}{(1+\cos x)^2}.e^x dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' e^x dx = \int e^x d\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x - \int \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x dx \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được : $I = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}.e^x + C$.

Cách 6: (phương pháp biến đổi, phương pháp nguyên hàm từng phần)

Ta có $I = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}.e^x dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x dx \qquad (1)$

Xét $J = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}.e^x dx = \int \frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx = \int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$$= e^x.\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2} e^x dx = e^x.\tan\frac{x}{2} - \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} e^x dx$$

$$= e^x.\tan\frac{x}{2} - \int \frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^x dx$$

$$= e^x.\tan\frac{x}{2} - \int \frac{\sin x}{1+\cos x} e^x dx \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $I = e^x.\tan\dfrac{x}{2} + C$.

* **Chú ý:** Kết quả ở cách 4 và cách trước đều đúng!

$$e^x.\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.e^x=\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}.e^x=\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x.$$

Cách 7: (phương pháp biến đổi, phương pháp nguyên hàm từng phần)

Ta có $I=\int\frac{1}{1+\cos x}.e^xdx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^xdx$

$$=\int\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^xdx=\int e^xd\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}d\left(e^x\right)$$

$$=\int e^xd\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}.e^x-\int e^x.d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

Suy ra: $I=e^x.\tan\frac{x}{2}+C$.

Cách 8: (phương pháp biến đổi, phương pháp nguyên hàm từng phần)

Ta có $I=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^xdx=\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^xdx$

$$=\int\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^xdx=\frac{1}{2}\int\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2.e^xdx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right).e^xdx+\frac{1}{2}\int2\tan\frac{x}{2}.e^xdx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}.e^xdx+\int\tan\frac{x}{2}.e^xdx=\int e^xd\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}d\left(e^x\right)$$

$$=\int e^xd\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}.e^x-\int e^x.d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

Suy ra: $I=e^x.\tan\frac{x}{2}+C$.

Cách 9: (dùng nguyên hàm từng phần hai lần)

Đặt $u=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\Rightarrow du=\frac{\cos x+\cos^2x+\sin x+\sin^2x}{(1+\cos x)^2}dx$

$$=\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx.$$

$dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x$.

Ta có $I=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x-\int\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}.e^xdx$

$$=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x-\int\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}.e^xdx-\int\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}.e^xdx$$

$$=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x-\int\frac{e^xdx}{1+\cos x}-\int\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}.e^xdx \qquad (1)$$

Xét $J=\int\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}.e^xdx$.

Đặt $u=e^x\Rightarrow du=e^xdx$;

$$dv=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=\frac{-d(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}\Rightarrow v=\frac{1}{1+\cos x}.$$

$$\Rightarrow J=\frac{e^x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $I=\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x+C$.

Cách 10: (phương pháp hệ số bất định)

Ta xác định hệ số a, b, c sao cho:

$$\left(\frac{a\cos x+b\sin x+c}{1+\cos x}.e^x\right)'=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x \qquad (1)$$

Ta có: $\left(\frac{a\cos x+b\sin x+c}{1+\cos x}.e^x\right)'$

$$= \frac{(-a\sin x+b\cos x)(1+\cos x)+\sin x(a\cos x+b\sin x+c)}{(1+\cos x)^2}e^x +$$

$$+\frac{a\cos x+b\sin x+c}{1+\cos x}.e^x$$

$$=\frac{-a\sin x-a\sin x\cos x+b\cos x+b\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}e^x+$$

$$+\frac{a\sin x\cos x+b\sin^2 x+c\sin x}{(1+\cos x)^2}e^x$$

$$=\frac{\left[(a+b+c).\cos x+(b+c)\right]+\sin x.\left[(b+c-a)+b\cos x\right]}{(1+\cos x)^2}e^x+$$

$$+\frac{a\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}e^x.$$

Vậy ta chọn a, b, c sao cho : $\begin{cases} a+b+c=b+c=1 \\ b+c-a=b=1 \\ a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}.e^x\right)' = \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$.

Vậy $I=\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx=\int\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x\right)' dx=\int d\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x\right)$

$$=\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x+C.$$

Cách 11: (dùng nguyên hàm phụ)

Ta có $I=\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx=\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx$

$$=\int\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx=\int\frac{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx.$$

Xét nguyên hàm phụ $J=\displaystyle\int\frac{\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx$.

Ta có: $I+J=\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx=2\int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ (1);

$$I-J=\int\frac{\cos(x-\frac{\pi}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx=\int\frac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx$$

$$=\int\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx=2\int\tan\frac{x}{2}.e^x dx$$

$$=2\int\tan\frac{x}{2}d\left(e^x\right)=2\left[e^x.\tan\frac{x}{2}-\int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right] \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} I+J=2\displaystyle\int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right) \\ I-J=2e^x.\tan\dfrac{x}{2}-2\displaystyle\int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right) \end{cases}$

Suy ra $I=e^x.\tan\dfrac{x}{2}+C$.

Cách 12: (dùng nguyên hàm phụ)

Ta có $I=\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx$

Xét nguyên hàm phụ $J=\displaystyle\int\frac{1-\sin x}{1+\cos x}.e^x dx$.

Ta có: $I+J=2\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}.e^x dx=\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx=2\int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$$=2e^x.\tan\frac{x}{2}-2\int e^x.\tan\frac{x}{2}dx \quad (1)$$

$$I-J=2\int\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x dx=2\int\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx=2\int\tan\frac{x}{2}.e^x dx \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} I+J=2e^x.\tan\dfrac{x}{2}-2\displaystyle\int e^x.\tan\dfrac{x}{2}dx \\ I-J=2\displaystyle\int \tan\dfrac{x}{2}.e^x dx \end{cases}$

Suy ra $I=e^x.\tan\frac{x}{2}+C$.

Cách 13: (dùng tính chất của nguyên hàm)

Ta có $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x=\dfrac{1}{1+\cos x}.e^x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}.e^x$

Mà $\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1}{1+\cos x}$

Nên ta có :

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x=e^x.\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'+\left(e^x\right)'.\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x\right)'.$$

Vậy $I=\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx=\int\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x\right)'dx$

$$=\int d\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x\right)=\frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x+C.$$

Xin chân thành cảm ơn bạn đọc gần xa !

Trần Tuấn Anh

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 3

GIẢI NHANH BÀI TOÁN TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013 5

Chương 1. NGUYÊN HÀM 10

Bài 1. Nguyên hàm 10

Bài 2. Bảng nguyên hàm mở rộng 18

Bài 3. Phương pháp đổi biến số 25

Bài 4. Phương pháp biến đổi 68

Bài 5. Phương pháp nguyên hàm từng phần 91

Chương 2. TÍCH PHÂN

Bài 1. Tích phân 127

Bài 2. Phương pháp tính tích phân 133

Bài 3. Tích phân hàm hữu tỉ 160

Bài 4. Tích phân hàm lượng giác 167

Bài 5. Tích phân hàm chứa căn thức 178

Bài 6. Tích phân hàm mũ và Lôgarit 182

Bài 7. Tích phân hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối 187

Bài 8. Một số lớp tích phân đặc biệt 190

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG II

Bài 1. Tích phân 197

Bài 2. Phương pháp tính tích phân 197

Bài 3. Tích phân hàm hữu tỉ 200

Bài 4. Tích phân hàm lượng giác 202
Bài 5. Tích phân hàm chứa căn thức 203
Bài 6. Tích phân hàm mũ và Lôgarit 204
Bài 7. Tích phân hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối 204
Bài 8. Một số lớp tích phân đặc biệt 205
Chương 3. MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI TÍNH TÍCH PHÂN VÀ BIỆN PHÁP KHẮC PHỤC 207
Chương 4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN
Bài 1. Tính diện tích hình phẳng 215
Bài 2. Tính thể tích khối tròn xoay 218
Bài 3. Ứng dụng khác của tích phân 220
PHỤ LỤC. BÀI TOÁN CÓ NHIỀU CÁCH GIẢI 226
MỤC LỤC 235

GIẢI NHANH BÀI TOÁN
NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Trần Tuấn Anh

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
Khu phố 6, Phường Linh Trung, Quận Thủ Đức, TPHCM
Số 3, Công trường Quốc tế, Quận 3, TP Hồ Chí Minh
ĐT: 38239171 – 38225227 - 38239172
Fax: 38239172 - E-mail: vnuhp@vnuhcm.edu.vn

PHÒNG PHÁT HÀNH NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
Số 3 Công trường Quốc tế - Quận 3 - TPHCM
ĐT: 38239170 - 0982920509 - 0913943466
Fax: 38239172 - Website: www.nxbdhqghcm.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
NGUYỄN HOÀNG DŨNG
Chịu trách nhiệm nội dung:
HUỲNH BÁ LÂN
Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm về tác quyền
CÔNG TY TNHH MTV SÁCH VIỆT
Biên tập:
CAO NGHI THỤC
Sửa bản in:
TRẦN TÂM
Trình bày bìa:
SACHVIETCO

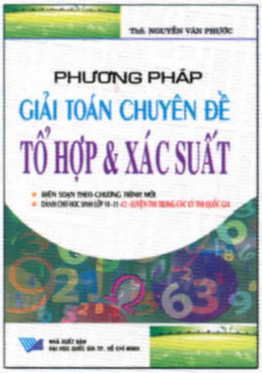
Mã số ISBN: 978-604-73-1929-9

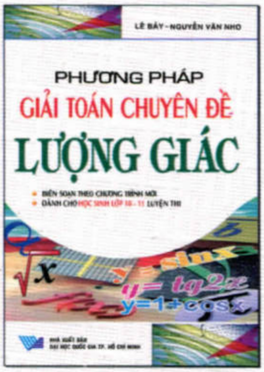
Số lượng 2.000 cuốn; khổ 16 x 24 cm.
Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 1370-2013/CXB/02-70/ĐHQGTPHCM
Quyết định xuất bản số: 188 ngày 22/10/2013 của NXB ĐHQGTPHCM.
In tại Xí nghiệp in Machinco
Nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2013

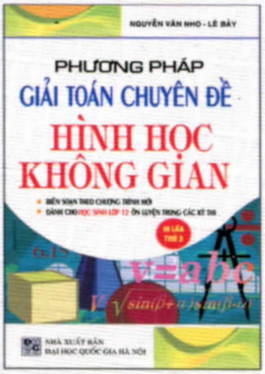
SÁCH VIỆT
ĐIỂM TỰA TRI THỨC

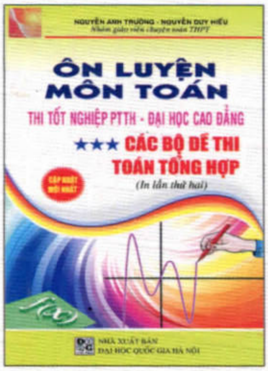
CÔNG TY TNHH MỘT THÀNH VIÊN SÁCH VIỆT
391/15A Huỳnh Tấn Phát, P.Tân Thuận Đông, Quận 7, TP.HCM
ĐT: (08) 38.720.897 - Fax: (08) 38.726.052
www.sachvietco.com - Email:sales@sachvietco.com.

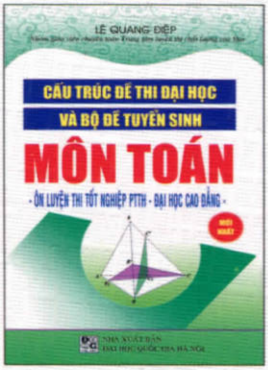
Mời các bạn tìm đọc

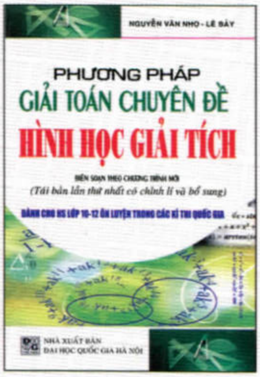

ThS. NGUYỄN VĂN PHƯỚC
PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ
TỔ HỢP & XÁC SUẤT
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

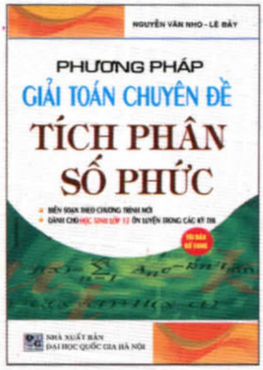

LÊ BẢY - NGUYỄN VĂN NHO
PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ
LƯỢNG GIÁC
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

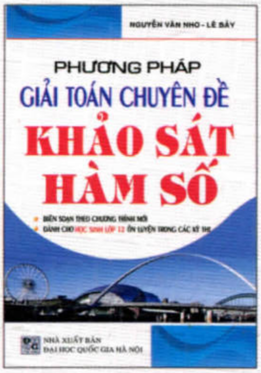

NGUYỄN VĂN NHO - LÊ BẢY
PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI


NGUYỄN ANH TRƯỜNG - NGUYỄN DUY HIẾU
ÔN LUYỆN MÔN TOÁN
THI TỐT NGHIỆP PTTH - ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG
★★★ CÁC BỘ ĐỀ THI TOÁN TỔNG HỢP
(In lần thứ hai)
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI


LÊ QUANG ĐIỆP
CẤU TRÚC ĐỀ THI ĐẠI HỌC
VÀ BỘ ĐỀ TUYỂN SINH
MÔN TOÁN
- ÔN LUYỆN THI TỐT NGHIỆP PTTH - ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG -
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI


NGUYỄN VĂN NHO - LÊ BẢY
PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH
BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH MỚI
(Tái bản lần thứ nhất có chỉnh lí và bổ sung)
DÀNH CHO HS LỚP 10-12 ÔN LUYỆN TRONG CÁC KÌ THI QUỐC GIA
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI


NGUYỄN VĂN NHO - LÊ BẢY
PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ
TÍCH PHÂN SỐ PHỨC
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI


NGUYỄN VĂN NHO - LÊ BẢY
PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ
KHẢO SÁT HÀM SỐ
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VĂN NHO - LÊ BẢY
PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ
HÀM SỐ LŨY THỪA
HÀM SỐ MŨ
HÀM SỐ LOGARIT
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ISBN:978-604-73-1929-9

ĐẶT HÀNG ONLINE
www.sachvietco.com

GIAI NHANH BAI TOAN NGUYEN HAM
101168550
49.000 đ/C gthieusach
C20140122

D
13

Giá: 49.000đ